Zetafunktionen von auflösbaren Gruppen

Bachelor-Arbeit

Philip Herriger

Mathematisches Institut
der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Betreuung: Prof. Dr. F. Grunewald

Einleitung

In einer endlich erzeugten Gruppe G existieren nur endlich viele Untergruppen zu einem bestimmten Index $n \in \mathbb{N}$, deren Anzahl man mit $a_G(n)$ bezeichnet. Diese arithmetische Funktion $n \longmapsto a_G(n)$ oder auch allgemeinere strukturelle Eigenschaften von G versucht man zu untersuchen, indem man Rückschlüsse über die von $(a_G(n))_{n\in\mathbb{N}}$ erzeugte Dirichlet-Reihe

$$\zeta_G(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_G(n) n^{-s}$$

zieht. Diese spezielle Dirichlet-Reihe wird Zetafunktion von G genannt. Mit Hilfe von Zetafunktionen lassen sich zum Beispiel in vielen Fällen asymptotische Aussagen über das Untergruppenwachstum einer Gruppe herleiten. Am meisten ist bisher über die Zetafunktionen von endlich erzeugten, torsionsfreien, nilpotenten Gruppen - so genannten $\mathcal{T}$-Gruppen - bekannt. Zetafunktionen von $\mathcal{T}$-Gruppen besitzen stets ein Eulerprodukt, konvergieren auf einer Halbebene von $\mathbb{C}$ (oder ganz $\mathbb{C}$) und lassen sich über ihre Konvergenzabzisse hinaus meromorph fortsetzen. Betrachtet man nun eine endliche Erweiterung $H \lhd_f G$ einer $\mathcal{T}$-Gruppe H mit auflösbarem Quotienten G/H, so ist G endlich erzeugt und auflösbar. Die Zetafunktion von G konvergiert auf einer Halbebene von $\mathbb{C}$ - jedoch muss G nicht mehr nilpotent sein und die Theorie der Zetafunktionen von $\mathcal{T}$-Gruppen läßt sich nicht unbedingt anwenden. Das tiefergehende Verständis der Zetafunktionen dieser endlichen Erweiterungen ist ein noch offenes Problem in der Forschung. Es wäre zum Beispiel interessant, einen Zusammenhang zwischen der Zetafunktion der Erweiterung und der Zetafunktion der zugrunde liegenden $\mathcal{T}$-Gruppe festzustellen.

Der Schwerpunkt dieser Bachelor-Arbeit besteht darin, anhand der Heisenberg-Gruppe ein Beispiel zu der oben dargestellten Frage zu behandeln. Die Heisenberg-Gruppe

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

ist eine $\mathcal{T}$-Gruppe mit Nilpotenz-Klasse 2. Die Zetafunktion von H_3 ist bekannt. Es gilt

$$\zeta_{H_3}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}.$$

Dieses Ergebnis wird in Paragraph 3 dieser Arbeit noch einmal hergeleitet und die Untergruppen von H_3 zu endlichem Index werden untersucht, um im Anschluss daran in einem einfachen Fall die Zetafunktion einer endlichen Erweiterung von H_3 zu bestimmen. Diese Erweiterung ist die folgende Gruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x_i \in \mathbb{Z},\, \varepsilon \in \{1,-1\} \right\}.$$

G ist auflösbar, aber nicht nilpotent und somit keine $\mathcal{T}$-Gruppe. Die Zetafunktion von G ergibt sich als

$$\zeta_G(s) = \left(\frac{2^{-4s+4} + 2^{-3s+4} + 3 \cdot 2^{-2s+3} + 3 \cdot 2^{-s+1} + 1}{2^{-2s+2} + 2^{-s+1} + 1} \right) \cdot \zeta_{H_3}(s).$$

$\zeta_G(s)$ hat genau wie $\zeta_{H_3}(s)$ die Konvergenzabzisse 2 und für $p \neq 2$ die gleichen Eulerfaktoren

$$\zeta_{a_G,p}(s) = \frac{1 - p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})}.$$

Für $p = 2$ gilt

$$\zeta_{a_G,2}(s) = \frac{2^{-4s+4} + 2^{-3s+4} + 3 \cdot 2^{-2s+3} + 3 \cdot 2^{-s+1} + 1}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-s})}.$$

Insbesondere besitzt $\zeta_G(s)$ somit ein Eulerprodukt und die Abbildung $n \longmapsto a_G(n)$ ist multiplikativ.

Paragraph 1 dieser Arbeit dient der Erarbeitung grundlegender Begriffe, um einen Einstieg in die Theorie der Zetafunktionen von Gruppen zu finden. Außerdem werden die wichtigsten Aussagen über Zetafunktionen von $\mathcal{T}$-Gruppen kurz vorgestellt und begründet, warum Zetafunktionen von endlichen Erweiterungen von $\mathcal{T}$-Gruppen konvergieren. Paragraph 1 ist sehr allgemein gehalten und wenig an dem oben beschriebenen Problem orientiert.

In Paragraph 2 wird als erstes Beispiel für eine Zetafunktion einer Gruppe die Zetafunktion von $\mathbb{Z}^d$ (also von $\mathcal{T}$-Gruppen mit Nilpotenz-Klasse 1) bestimmt. Hierbei wird induktiv vorgegangen und $\mathbb{Z}^d$ als Erweiterung von $\mathbb{Z}$ betrachtet, um folgendes auch allgemeiner gültige Prinzip anzuwenden: Ist $H \lhd G$ eine Erweiterung, so lässt sich die Zetafunktion von G als eine Art Zetafunktion von H in Verbindung mit der Zetafunktion des Quotienten G/H darstellen. Es gilt

$$\sum_{U \leq_f G} [G:U]^{-s} = \sum_{H \leq A \leq_f G} [G:A]^{-s} \cdot \left(\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(A,B)| \cdot [H:B]^{-s} \right)$$

wobei $\mathcal{U}_H(A,B)$ die Menge aller Untergruppen U von G mit $U \cap H = B$ und $UH = A$ ist. Im Fall von $\mathbb{Z}^d$ stellt sich heraus, dass $|\mathcal{U}_H(A,B)|$ unabhängig von A ist und beide Reihen sich auseinander ziehen lassen. Im Anschluss daran wird dieses Prinzip für den Fall, dass H eine abelsche Gruppe ist, noch etwas näher betrachtet. Mit endlichen Erweiterungen von abelschen Gruppen bzw. $\mathcal{T}$-Gruppen mit Nilpotenz-Klasse 1 hat sich vor allem der Artikel [2] beschäftigt. In [2] wird zum Beispiel gezeigt, dass Zetafunktionen von endlichen Erweiterungen von $\mathbb{Z}^d$ stets eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzen.

An dieser Stelle möchte ich mich auch sehr herzlich bei Prof. Dr. Fritz Grunewald für die Vergabe der spannenden Aufgabe und für seine große Hilfsbereitschaft bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Paragraph 1

Zetafunktionen von Gruppen

1.1 Dirichlet-Reihen

Da es sich bei der Zetafunktion einer Gruppe um eine Dirichlet-Reihe handelt, beginnen wir diese Arbeit mit einer kurzen Darstellung dieser Thematik.

Definition 1.1
Sei $a_n \in \mathbb{C}$ und $s \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

die der Folge (a_n) zugeordnete Dirichlet-Reihe.

Eine Dirichlet-Reihe $\sum a_n n^{-s}$ konvergiert entweder für alle $s \in \mathbb{C}$ oder nirgends oder es existiert ein $\sigma' \in \mathbb{R}$, so dass die Reihe in der offenen Halbebene $H_{\sigma'} = \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma'\}$ konvergiert und für $\operatorname{Re}(s) < \sigma'$ divergiert. σ' heißt dann die Konvergenz-Abzisse der Reihe.

$$\sigma' = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists s \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re}(s) = \sigma \text{ und } \sum a_n n^{-s} \text{ konvergiert} \right\}.$$

Dies folgt im Wesentlichen aus folgendem Satz.

Satz 1.2
Konvergiert die Dirichlet-Reihe $\sum a_n n^{-s}$ in dem Punkt $s_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch für alle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ gleichmäßig auf der Menge

$$T_\alpha(s_0) = \left\{ s \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\arg(s - s_0)| \le \alpha \right\}.$$

Beweis. Man siehe [6, Seite 8, Theorem I.2.1]. ■

Für eine komplexe Zahl s ist $\arg(s) \in (-\pi, \pi]$ der Winkel von s in Polarkoordinaten. Die Menge $T_\alpha(s_0)$ in obigen Satz beschreibt dann einen nach rechts geöffneten Trichter mit Spitze in s_0 und Öffnungswinkel 2α. Wählt man zu einem $s \in H_{\mathrm{Re}(s_0)}$ den Winkel α groß genug, so liegt s in dem Trichter $T_\alpha(s_0)$ und die Dirichlet-Reihe konvergiert in s.
Analog folgert man mit Hilfe von Satz 1.2, dass eine Dirichlet-Reihe in ihrer offenen Konvergenz-Halbebene lokal-gleichmäßig und somit kompakt konvergiert.
Im Gegensatz zu Potenzreihen können sich bei Dirichlet-Reihen die Bereiche der gewöhnlichen und absoluten Konvergenz deutlich unterscheiden. Jedoch wie bei der gewöhnlichen Konvergenz existiert ein $\sigma' \in [-\infty, \infty]$, so dass die Reihe in der offenen Halbebene $H_{\sigma'} = \{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) > \sigma'\}$ absolut konvergiert und für $\mathrm{Re}(s) < \sigma'$ nicht absolut konvergiert. σ' heißt hier Abzisse der absoluten Konvergenz. Wegen

$$|a_n n^{-s}| = |a_n| n^{-\mathrm{Re}(s)} \tag{1.1}$$

ist für alle $\delta > 0$ die Reihe $\sum |a_n| n^{-(\sigma'+\delta)}$ eine Majorante für alle Reihen mit $\mathrm{Re}(s) \geq \sigma' + \delta$ und aus dem Majorantenkriterium von Weierstraß [7, Seite 91, Satz 3.2.3] folgt, dass $\sum a_n n^{-s}$ auf der abgeschlossenen Halbebene $\overline{H}_{\sigma'+\delta}$ gleichmäßig konvergiert. Analog folgert man, dass $\sum a_n n^{-s}$ auf der offenen Halbebene der absoluten Konvergenz $H_{\sigma'}$ lokal-gleichmäßig konvergiert.
Absolut konvergente Reihen dürfen umgeordnet werden, d.h. es gilt $\sum a_n = \sum a_{\tau(n)}$ für jede Bijektion $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Außerdem gilt der für uns wichtige Umordnungssatz für Doppelreihen.

Satz 1.3 (Umordnungssatz)
Sei $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ eine Doppelfolge in $\mathbb{C}$. Weiter sei eine beliebige Bijektion $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gegeben, so dass $c_k = a_{\tau(k)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist. Dann sind äquivalent:
a) Die Reihe $\sum c_k$ konvergiert absolut.
b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_m a_{m,n}$ absolut, und die Reihe $\sum_n \left(\sum_m |a_{m,n}|\right)$ konvergiert.
Sind a) und b) erfüllt, so sind die Reihen $\sum_n \left(\sum_m a_{m,n}\right)$ und $\sum_m \left(\sum_n a_{m,n}\right)$ konvergent und es gilt

$$\sum_n \left(\sum_m a_{m,n}\right) = \sum_m \left(\sum_n a_{m,n}\right) = \sum_k c_k.$$

Beweis. Man kann diesen Satz als einen Spezialfall des Satzes von Fubini aus der Maß- und Integrationstheorie für das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ betrachten. Wir verweisen hier aber auf [7, Seite 29]. ■

Mit Hilfe des Konvergenzsatzes von Weierstraß [7, Seite 222, Satz 8.4.1] sieht man, dass Dirichlet-Reihen in ihrer offenen Konvergenz-Halbebene holomorphe Funktionen darstellen und gliedweise differenziert werden dürfen. Häufig existiert eine meromorphe Fortsetzung darüber hinaus, wie zum Beispiel bei der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

die über ihre Konvergenz-Abzisse von 1 hinaus eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt.

1.2 Die Zetafunktion einer Gruppe

Wir kommen nun zu dem Begriff der Zetafunktion einer Gruppe.

Definition 1.4
Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann bezeichne $\mathcal{U}(G,n)$ die Menge der Untergruppen zum Index $n \in \mathbb{N}$ und $a_G(n) := |\mathcal{U}(G,n)|$. Die Zetafunktion der Gruppe G im Punkt $s \in \mathbb{C}$ ist definiert als die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_G(n) n^{-s}$$

und wird bezeichnet mit $\zeta_G(s)$.

In den veröffentlichten Arbeiten zu diesem Thema wird sich ebenso mit der Zetafunktion einer Gruppe beschäftigt, die ausschließlich die Normalteiler von G zu einem endlichen Index zählt. Wir wollen uns hier jedoch auf obige Definition beschränken. Da die Koeffizienten unserer Zetafunktionen stets nicht negative reelle Zahlen sind und wegen Gleichung 1.1, stimmen die Abzisse der gewöhnlichen Konvergenz und die der absoluten Konvergenz überein. Wir können also stets die Reihen im Rahmen des Umordnungssatzes 1.3 recht frei umgestalten. So gilt zum Beispiel

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_G(n) n^{-s} = \sum_{H \leq_f G} [G:H]^{-s}.$$

Jedoch ist an dieser Stelle noch unklar, ob die Koeffizienten der Reihen in obiger Definition überhaupt endlich sind und unter welchen Umständen man Konvergenz erwarten darf.

Satz 1.5
Sei $G = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ eine endlich erzeugte Gruppe und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|\mathcal{U}(G,n)| < \infty$.

Beweis. Sei $\Lambda(G,n) := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(G,\Sigma_n) \,|\, \varphi(G) \text{ ist transitiv}\}$ die Menge der Gruppenhomomorphismen, die G auf eine transitive Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_n abbilden. Wir zeigen, $\Lambda(G,n)$ ist eine endliche Menge und es existiert eine surjektive Abbildung $\Psi : \Lambda(G,n) \longrightarrow \mathcal{U}(G,n)$. Aus beiden Tatsachen zusammen folgt dann die Aussage von Satz 1.5.

1) Ein Gruppenhomomorphismus auf G ist durch die Bilder eines Erzeugendensystems von G eindeutig bestimmt. Fixiert man ein Erzeugendensystem - etwa $x_1, \ldots, x_r$ - so erhält man also durch $\varphi \mapsto (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_r))$ eine injektive Abbildung $\mathrm{Hom}(G,\Sigma_n) \longrightarrow (\Sigma_n)^r$. Es folgt $|\mathrm{Hom}(G,\Sigma_n)| \leq |(\Sigma_n)^r| = (n!)^r$. Wegen $\Lambda(G,n) \subseteq \mathrm{Hom}(G,\Sigma_n)$ ist die Menge $\Lambda(G,n)$ also endlich.

2) Wir definieren zu $\varphi \in \Lambda(G,n)$

$$\Psi(\varphi) := U_\varphi := \{x \in G \,|\, \varphi(x)(1) = 1\}.$$

U_φ ist das Urbild unter φ von S_1, wobei $S_1 \leq \varphi(G)$ den Stabilisator der 1 in der Permutationsgruppe $\varphi(G)$ bezeichne. Als Urbild einer Gruppe unter einem Gruppenhomomorphismus ist U_φ also selbst eine Untergruppe von G. Wir betrachten nun die von φ induzierte surjektive Abbildung von G auf die Nebenklassen von S_1 in $\varphi(G)$

$$\pi : x \mapsto \varphi(x)S_1.$$

Es gilt $\pi(x) = \pi(y) \iff \varphi(y^{-1}x) \in S_1 \iff y^{-1}x \in U_\varphi \iff xU_\varphi = yU_\varphi$. Wir erhalten also durch $xU_\varphi \mapsto \pi(x)$ eine Bijektion $G/U_\varphi \longrightarrow \varphi(G)/S_1$ und somit gilt $[G : U_\varphi] = [\varphi(G) : S_1]$. Auf Grund der Tatsache, dass eine Permutationsgruppe $J \leq \Sigma_n$ genau dann transitiv ist, wenn ihr Stabilisator der 1 den Index n in J hat [5, Seite 148, Theorem 25], folgt $[G : U_\varphi] = n$ und die Abbildung $\Psi : \Lambda(G,n) \longrightarrow \mathcal{U}(G,n)$ ist wohldefiniert.

3) Es bleibt zu zeigen, dass Ψ surjektiv ist. Dazu sei $U \in \mathcal{U}(G,n)$ und

$$G = g_1 U \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\, g_n U$$

mit $g_1 = 1$. Zu den fest gewählten $g_1, \ldots, g_n$ definieren wir $\varphi_U : G \longrightarrow \Sigma_n$ durch $\varphi_u(x)(i) = j :\Leftrightarrow xg_iU = g_jU$ für $i,j \in \{1, \ldots, n\}$. Man rechnet nach, dass φ_U dadurch zu einem Gruppenhomomorphismus wird. Siehe auch [5, Seite 146, Theorem 24]. Ferner ist $\varphi_U(G)$ transitiv, denn zu $i,j \in \{1, \ldots, n\}$ wählt man $x = g_j g_i^{-1}$ und es gilt $\varphi_U(x)(i) = j$. Also $\varphi_U \in \Lambda(G,n)$. Wegen $x \in U \iff xU = U \iff \varphi_U(x)(1) = 1$ gilt $U = \{x \in G \,|\, \varphi_U(x)(1) = 1\}$ und somit $\Psi(\varphi_U) = U$. ■

Definition 1.6
Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Wir sagen G besitzt polynomielles (oder normales) Untergruppenwachstum, falls Konstanten $c^*, t \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$a_G(n) \leq c^* n^t$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Zetafunktion einer Gruppe mit polynomiellen Untergruppenwachstum konvergiert zumindest für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > t + 1$. Dies folgt aus dem Majorantenkriterium mit $\sum c^* n^{t-\mathrm{Re}(s)}$ als Majorante [7, Seite 25, Satz 0.4.2]. Umgekehrt falls die Zetafunktion einer Gruppe in einem Punkt $t \in \mathbb{R}$ konvergiert, so bildet $\left(a_G(n)n^{-t}\right)_n$ eine Nullfolge und ist beschränkt. Es existiert also ein $c^* \in \mathbb{R}$ mit $a_G(n)n^{-t} \leq c^*$. Und es folgt $a_G(n) \leq c^* n^t$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppen mit polynomiellen Untergruppenwachstum sind also genau die Gruppen, deren Zetafunktion auf einer Halbebene oder ganz $\mathbb{C}$ konvergiert. Wir kommen später auf diesen Begriff zurück und werden näher erläutern, welche Gruppen polynomielles Untergruppenwachstum besitzen.

1.3 Das Eulerprodukt

Die Dirichlet-Reihe einer multiplikativen Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $a(1) = 1$ besitzt auf ihrer offenen Halbebene der absoluten Konvergenz ein Eulerprodukt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a(p^k)p^{-sk} \right),$$

wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen bezeichne. Das Produkt über alle Primzahlen ist als Grenzwert der "Partialprodukte" zu verstehen, das hier unabhängig von der Reihenfolge der Primzahlen ist. Die Potenzreihen, die multipliziert werden, nennt man Euler-Faktoren - sie sind als Teilreihen der absolut konvergenten Reihe $\sum a(n)n^{-s}$ selbst absolut konvergent. So ist zum Beispiel für $s \in H_1$ das Eulerprodukt der Riemannschen Zetafunktion gegeben durch

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \tag{1.2}$$

Definition 1.7
Zu einer Funktion $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ und einer Primzahl $p \in \mathbb{P}$ definieren wir den Euler-Faktor

der Dirichlet-Reihe $\sum a(n)n^{-s}$ *zur Primzahl* p *als*

$$\zeta_{a,p}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a(p^k)p^{-sk}.$$

Außerdem sei

$$\zeta^*_{a,p}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} |a(p^k)p^{-sk}|.$$

Da das Eulerprodukt für unsere Berechnungen in Paragraph 3 eine entscheidende Rolle spielt, wollen wir uns an dieser Stelle noch mit einer leichten Modifikation beschäftigen und den Beweis des Eulerproduktes führen. Setzt man das Eulerprodukt voraus, so lässt sich die folgende Aussage mit der darauf folgenden Bemerkung 1.9 leicht folgern.

Satz 1.8 (Eulerprodukt)
Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *in dem folgendem Sinne multiplikativ. Es existiere ein* $q \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $a(1) = q$ *und für alle Primzahlen* p *gelte*

$$q \cdot a(p^k n) = a(p^k) \cdot a(n)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ *und für alle* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$. *Dann gilt: Die zu* a *gehörende Dirichlet-Reihe konvergiert in einem Punkt* $s \in \mathbb{C}$ *genau dann absolut, wenn alle ihre Euler-Faktoren in* s *absolut konvergieren und* $\prod \zeta^*_{\frac{a}{q},p}(s)$ *konvergent ist. Es gilt dann*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a(n)n^{-s} = q \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(p^k)}{q} p^{-sk} \right).$$

Beweis. Sei $p_1, p_2, p_3, \ldots$ eine beliebige Anordnung der Primzahlen. Zu $M' \in \mathbb{N}$ wählen wir $M \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass die Bedingung $\{1, \ldots, M'\} \subset \{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_M^{k_M} \mid k_i \in \mathbb{N}_0\}$ erfüllt ist. Wählt man statt M ein $m \geq M$ zu festem M', so bleibt die Bedingung natürlich erfüllt. Wir nehmen nun die absolute Konvergenz der Euler-Faktoren $\zeta_{a,p_i}(s)$ für alle p_i an und rechnen

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{M} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{a(p_i^k)}{q} p_i^{-sk} \right| \right) &= \sum_{(k_1,\ldots,k_M)\in\mathbb{N}_0^M} \left| \frac{1}{q^M} \cdot a(p_1^{k_1}) \cdot \ldots \cdot a(p_M^{k_M}) \cdot (p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_M^{k_M})^{-s} \right| \\
&= \sum_{(k_1,\ldots,k_M)\in\mathbb{N}_0^M} \left| \frac{1}{q} \cdot a(p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_M^{k_M}) \cdot (p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_M^{k_M})^{-s} \right| \\
&= \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=1}^{M'} \left| a(n)n^{-s} \right| + R(M, M').
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird dabei sukzessive der Umordnungssatz 1.3 angewandt und im zweiten Schritt die Multiplikativität von a benutzt. Beim dritten Gleichheitszeichen geht die eindeutige Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ und die spezielle Wahl von M ein. $R(M, M')$ bezeichnet den Rest-Term, der die Summanden zu den Zahlen

$$\{p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_M^{k_M} \mid k_i \in \mathbb{N}_0\} \setminus \{1, \ldots, M'\}$$

enthält.

Wir wollen nun die Aussage von 1.8 beweisen. Seien also alle Euler-Faktoren $\zeta_{a,p_i}(s)$ absolut konvergent und es gelte $\prod_{i=1}^{\infty} \zeta^*_{\frac{a}{q},p_i}(s) = C$ mit $C \in [0, \infty)$. Angenommen $\sum |a(n)n^{-s}|$ divergiert. Dann existiert ein M' mit

$$\frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=1}^{M'} |a(n)n^{-s}| > C + 1.$$

Wählt man nun zu diesem M' ein hinreichend großes M, so gilt nach obiger Rechnung

$$\prod_{i=1}^{m} \zeta^*_{\frac{a}{q},p_i}(s) = \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=1}^{M'} |a(n)n^{-s}| + R(m, M') > C + 1$$

für alle $m \geq M$, da $R(m, M')$ stets nicht negativ ist. Dies ist ein Widerspruch.

Für die andere Implikation sei $\sum a(n)n^{-s}$ absolut konvergent. Als Teilreihen sind damit auch alle Euler-Faktoren absolut konvergent. Zu $\varepsilon > 0$ wähle man ein $M' \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für hinreichend großes M gilt dann ebenfalls mit Hilfe obiger Rechnung

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^{m} \zeta^*_{\frac{a}{q},p_i}(s) - \frac{1}{|q|} \sum_{n \in \mathbb{N}} |a(n)n^{-s}| \right| &= \left| R(m, M') - \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}| \right| \\ &\leq \left| R(m, M') \right| + \left| \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}| \right| \\ &\leq \frac{2}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}| < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m \geq M$. Denn $R(m, M')$ ist Teilreihe von $\frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}|$ und somit gilt stets $|R(m, M')| \leq \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}|$.

Ausgehend von der absoluten Konvergenz von $\sum a(n)n^{-s}$ läßt sich die Rechnung zu Anfang des Beweises auch ohne Beträge durchführen, denn der Umordnungssatz ist genauso anwendbar. Es folgt dann analog zu dem zuletzt gezeigten, dass die Grenzwerte vom Produkt der Euler-Faktoren und der Dirichlet-Reihe wie in 1.8 behauptet übereinstimmen. An dieser Stelle wird das $\frac{\varepsilon}{2}$ - Argument eigentlich erst erforderlich. $R(m, M')$ ist in diesem Fall eine Teilreihe von $\frac{1}{q}\sum_{n=M'}^{\infty} a(n)n^{-s}$ und es gilt somit $|R(m, M')| \leq \frac{1}{|q|} \cdot \sum_{n=M'}^{\infty} |a(n)n^{-s}|$ für alle $m \geq M$. ■

Bemerkung 1.9

a) Für Funktionen $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$, die im Sinne von Satz 1.8 multiplikativ sind, gilt bereits

$$a(n) \cdot a(m) = q \cdot a(nm)$$

für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$.

b) Ist $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ im Sinne von Satz 1.8 multiplikativ, so ist $\frac{1}{q} \cdot a$ im herkömmlichen Sinne multiplikativ. Umgekehrt, ist $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ multiplikativ, so erfüllt $q \cdot a$ die Voraussetzungen von Satz 1.8.

c) Zu Satz 1.8 gibt es in gewisser Weise eine Umkehrung. Sei $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ und es existiere ein $\sigma \in \mathbb{R}$, so dass auf H_σ gilt: $\sum a(n)n^{-s}$ konvergiert absolut und es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \zeta_{a,p}(s).$$

Dann ist die Abbildung a multiplikativ. Wir wollen dies kurz begründen. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $p_{n,1}^{k_{n,1}} \dots p_{n,r_n}^{k_{n,r_n}}$ die Primfaktorzerlegung. Analog zu dem Beweis von 1.8 überlegt man sich

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \zeta_{a,p}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(p_{n,1}^{k_{n,1}}) \cdot \ldots \cdot a(p_{n,r_n}^{k_{n,r_n}})n^{-s}$$

und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a(p_{n,1}^{k_{n,1}}) \cdot \ldots \cdot a(p_{n,r_n}^{k_{n,r_n}})n^{-s}$$

auf H_σ. Aus dem Identitätssatz für Dirichlet-Reihen folgt nun $a(n) = a(p_{n,1}^{k_{n,1}}) \cdot \ldots \cdot a(p_{n,r_n}^{k_{n,r_n}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und a ist multiplikativ.

1.4 Auflösbare und nilpotente Gruppen

Wir wollen nun die Begriffe Auflösbarkeit und Nilpotenz erläutern. Nilpotenz spielt in der Theorie der Zetafunktionen von Gruppen eine wichtige Rolle. Die meisten Erkenntnisse über Zetafunktionen liegen für nilpotente Gruppen vor. Die auflösbaren Gruppen bilden eine umfassendere Klasse von Gruppen. Wir stützen uns bei unseren Erläuterungen auf [4]. Ein Element

$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$$

einer Gruppe G heißt Kommutator von x und y. Die Untergruppe, die von allen Komutatoren in G erzeugt wird, heißt Kommutatorgruppe oder abgeleitete Gruppe. Wir schreiben

$$G' := \big\langle \{[x, y] \,|\, x, y \in G\} \big\rangle.$$

G' ist stets eine voll charakteristische Untergruppe von G. Dies bedeutet, dass G' für alle Endomorphismen $\varphi : G \longrightarrow G$ fest bleibt (d.h. $\varphi(G') \subset G'$). Eine Untergruppe U heißt charakteristisch in G, falls U für alle Automorphismen $\varphi : G \longrightarrow G$ fest bleibt.

Bemerkung 1.10
a) Die normalen Untergruppen von G sind genau die Untergruppen, die unter allen inneren Automorphismen $g \longmapsto x^{-1}gx$ fest bleiben. Charakteristische Untergruppen und somit auch voll charakteristische Untergruppen sind also normal.
b) Ist N ein Normalteiler in G, so müssen normale Untergruppen von N keine Normalteiler in G sein. Ist N jedoch eine charakteristische (bzw. voll charakteristische) Untergruppe von G, so sind charakteristische (bzw. voll charakteristische) Untergruppen in N dies auch schon in G. Außerdem sind charakteristische Untergruppen von Normalteilern wiederum Normalteiler.

Theorem 1.11
Der Quotient G/G' ist abelsch. Ist K Normalteiler in G und G/K ist abelsch, so folgt $G' \leq K$.

Beweis. [4, Seite 138, Theorem 9.2.1]. ■
Die Bildung der Kommutatorgruppe in G lässt sich sukkzessive fortsetzen, indem man die Kommutatorgruppe der Kommutatorgruppe bildet usw. - man erhält so eine Kette von Untergruppen von G

$$G \geq G' \geq G'' \geq \ldots \geq G^{(i)} \geq \ldots ,$$

in der $G^{(i)}$ stets die Kommutatorgruppe von $G^{(i-1)}$ ist. Diese Kette nennen wir abgeleitete Reihe von G. Nach obiger Bemerkung sind die $G^{(i)}$ alles voll charakteristische Untergruppen von G und somit insbesondere Normalteiler in G. Im Allgemeinen nennt man eine solche Kette von Untergruppen

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots ,$$

in der alle G_i Normalteiler von G sind, eine Normalreihe. Ist G_i bloß Normalteiler in G_{i-1}, so spricht man von einer Subnormalreihe.
Die Quotienten der abgeleiteten Reihe $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ sind nach Theorem 1.11 abelsch.

Definition 1.12
Eine Gruppe G heißt auflösbar, falls ihre abgeleitete Reihe endlich ist - d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$G \geq G' \geq G'' \geq \ldots \geq G^{(n)} = \{1\}.$$

Theorem 1.13
Für eine Gruppe G sind äquivalent:
a) G ist auflösbar.
b) G besitzt eine endliche Normalreihe $G = N_0 \geq N_1 \geq \ldots \geq N_r = \{1\}$, in der jeder Quotient N_i/N_{i+1} $i = 0, \ldots, r-1$ abelsch ist.
c) G besitzt eine endliche Subnormalreihe $G = A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_t = \{1\}$, in der jeder Quotient A_i/A_{i+1} $i = 0, \ldots, t-1$ abelsch ist.

Beweis. [4, Seite 140, Theorem 9.2.5]. ■

Theorem 1.14
Sei G eine Gruppe und H ein Normalteiler in G. G ist genau dann auflösbar, wenn H und G/H auflösbar sind. Jede Untergruppe von G ist auflösbar.

Beweis. [4, Seite 139, Theorem 9.2.2 und Seite 141, Collary 9.2.1]. ■

Wir kommen nun zu den nilpotenten Gruppen. Die Menge der Elemente einer Gruppe G, die mit allen anderen Elementen kommutieren, heißt das Zentrum von G. Wir schreiben

$$Z(G) := \{z \in G \,|\, zg = gz \;\forall\, g \in G\} = \{z \in G \,|\, [z, g] = 1 \;\forall\, g \in G\}.$$

$Z(G)$ bildet eine charakteristische Untergruppe von G und ist trivialerweise stets abelsch. Eine endliche Normalreihe $G = A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_r = \{1\}$, in der A_i/A_{i+1} im Zentrum von G/A_{i+1} liegt für $i = 0, \ldots, r-1$ heißt Zentralreihe.

Definition 1.15
Eine Gruppe G heißt nilpotent, falls G eine Zentralreihe $G = A_0 \geq A_1 \geq \ldots \geq A_r = \{1\}$ besitzt.

Da Zentralreihen abelsche Quotienten besitzen, sind nilpotente Gruppen nach Theorem

1.13 insbesondere auflösbar. Die Umkehrung hiervon gilt nicht. In Paragraph 3 werden wir uns mit einer Gruppe beschäftigen, die auflösbar aber nicht nilpotent ist.
Wir kommen noch einmal zu den Kommutatoren vom Beginn dieses Abschnittes zurück. Zu Elementen $x_1, \ldots, x_n$ einer Gruppe G und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir nun Kommutatoren höherer Ordnung rekursiv durch

$$[x_1, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Ferner sei

$$\begin{aligned} \Gamma_1(G) &:= G, \\ \Gamma_k(G) &:= \langle \{[x_1, \ldots, x_k] \,|\, x_i \in G\} \rangle. \end{aligned}$$

Wegen $[x_1, \ldots, x_{k+1}] = [[x_1, x_2], x_3, \ldots, x_{k+1}]$ gilt $\Gamma_{k+1}(G) \leq \Gamma_k(G)$. Die $\Gamma_k(G)$ sind alles voll charakteristische Untergruppen von G und die Kette

$$G = \Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \Gamma_3(G) \geq \ldots$$

heißt absteigende Zentralreihe von G. Für Teilmengen $A, B \subset G$ setzen wir

$$[A, B] := \langle \{[a, b] \,|\, a \in A,\ b \in B\} \rangle.$$

Theorem 1.16
Für eine Gruppe G gilt $\Gamma_{k+1}(G) = [\Gamma_k(G), G]$.

Beweis. [4, Seite 150, Theorem 10.2.1]. ■
Aus Theorem 1.16 folgt, dass die absteigende Zentralreihe im oben erwähnten Sinne zentral ist - $\Gamma_k(G)/\Gamma_{k+1}(G)$ liegt nämlich im Zentrum von $G/\Gamma_{k+1}(G)$.
Wir definieren nun induktiv die aufsteigende Zentralreihe einer Gruppe G

$$Z_0(G) = \{1\} \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \ldots$$

durch die Bedingung, dass $Z_{i+1}(G)/Z_i(G)$ das Zentrum von $G/Z_i(G)$ sei. Ist die aufsteigende Zentralreihe endlich - d.h. existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $Z_r(G) = G$ - so ist die aufsteigende Zentralreihe eine Zentralreihe in obigem Sinne. Für eine charakteristische Untergruppe H in G induziert jeder Automorphismus $\varphi : G \longrightarrow G$ einen Automorphismus $\tilde{\varphi} : G/H \longrightarrow G/H$ mit

$$\tilde{\varphi} : gH \longmapsto \varphi(g)H.$$

Mit Hilfe dieser Tatsache überlegt man sich, dass wenn A/H eine charakteristische Untergruppe in G/H ist, A eine charakteristische Untergruppe von G bildet. Alle $Z_i(G)$ in der aufsteigenden Zentralreihe von G sind also charakteristische Untergruppen von G.

Theorem 1.17
Sei $G = A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_{r+1} = \{1\}$ eine Zentralreihe von G. Dann gilt $A_i \geq \Gamma_i(G)$ für alle $i = 1, \ldots, r+1$ und $A_{r+1-j} \leq Z_j(G)$ für alle $j = 0, \ldots, r$.

Beweis. [4, Seite 151, Theorem 10.2.2]. ■

Aus Theorem 1.17 folgt, dass in einer nilpotenten Gruppe G die aufsteigende und absteigende Zentralreihe beide endlich sind und die gleiche Länge c besitzen. c bezeichnet man als die Nilpotenz Klasse von G. Die nilpotenten Gruppen der Klasse 1 sind z.B. gerade die abelschen Gruppen.

Definition 1.18
Besitzt eine Gruppe G eine Normalreihe $G = A_0 \geq A_1 \geq \ldots A_r = \{1\}$, in der jeder Quotient A_i/A_{i+1} zyklisch ist, so heißt G superauflösbar.

Theorem 1.19
Eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe ist superauflösbar.

Beweis. [4, Seite 152, Theorem 10.2.4]. ■

Superauflösbare Gruppen G sind stets endlich erzeugt. Jede Untergruppe H von G und jeder Quotient G/H ist ebenfalls superauflösbar [4, Seite 158, Theorem 10.5.1]. Deshalb erfüllen superauflösbare Gruppen G die Maximal-Bedingung, d.h in G gelten die beiden folgenden äquivalenten Eigenschaften :
1) Jede Untergruppe von G ist endlich erzeugt.
2) Jede aufsteigende Kette von Untergruppen in G wird stationär.

1.5 Theoretische Resultate

In diesem Abschnitt wollen wir einige theoretische Resultate über Zetafunktionen von Gruppen vorstellen. Wir greifen hier auf die Zusammenstellung aus [1] zurück. Insbesondere wollen wir kurz darauf eingehen, wann eine Gruppe polynomielles Untergruppenwachstum besitzt.
Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Menge aller endlich erzeugten, nilpotenten und torsionsfreien Gruppen.

Theorem 1.20
Für $G \in \mathcal{T}$ gilt:
1) Die Dirichlet-Reihe $\zeta_G(s)$ konvergiert für ein $s \in \mathbb{C}$.
2) Die Koeffizienten $a_G(n)$ von $\zeta_G(s)$ sind multiplikativ und $\zeta_G(s)$ besitzt ein Eulerprodukt.

3) Die Eulerfaktoren $\zeta_{G,p}(s)$ sind rationale Funktionen in p^{-s}. Dies heißt, es existieren Polynome $Z_p, N_p \in \mathbb{Z}[X]$ mit

$$\zeta_{G,p}(s) = \frac{Z_p(p^{-s})}{N_p(p^{-s})}.$$

Außerdem existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass $\mathrm{grad}(Z_p) \leq K$ und $\mathrm{grad}(N_p) \leq K$ für alle p.

Theorem 1.21

Für $G \in \mathcal{T}$ gilt:

1) Die Konvergenzabzisse α_G von $\zeta_G(s)$ ist eine rationale Zahl.

2) Es existiert ein $\delta > 0$, so dass sich $\zeta_G(s)$ meromorph fortsetzen lässt auf die Halbebene

$$\{s \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(s) > \alpha_G - \delta\}.$$

3) Die Gerade $\mathrm{Re}(s) = \alpha_G$ enthält höchstens eine Polstelle von $\zeta_G(s)$. Falls die Polstelle existiert, liegt sie in $s = \alpha_G$.

Sei $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von Gruppen. Eine Gruppe G heißt residuell $\mathcal{P}$, falls

$$\bigcap \{N \,|\, N \lhd G \text{ und } G/N \text{ hat } \mathcal{P}\} = \{1\}$$

gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass zu jedem $g \in G \setminus \{1\}$ ein $N \lhd G$ existiert mit $g \notin N$ und G/N hat $\mathcal{P}$. Ferner sagt man, dass eine beliebige Gruppe G den Rang $r \in \mathbb{N}$ hat, wenn jede endlich erzeugte Untergruppe von G von höchstens r Elementen erzeugt werden kann. $\mathbb{Z}^n$ hat damit z.B. auch in diesem Sinne den Rang n, da jede Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ bekannterweise endlich erzeugt frei ist und eine Basis der Länge $k \leq n$ besitzt. Wir können nun ein Theorem formulieren, dass näher beschreibt, welche Gruppen polynomielles Untergruppenwachstum besitzen.

Theorem 1.22

Sei G eine endlich erzeugte und residuell endliche Gruppe. G besitzt genau dann polynomielles Untergruppenwachstum, wenn G eine Untergruppe mit endlichem Index besitzt, die auflösbar ist und endlichen Rang hat.

$\mathcal{T}$-Gruppen erfüllen die Voraussetzungen von Theorem 1.22. Man siehe hierzu ebenfalls [1]. Wir können mit Theorem 1.22 nun auch begründen, warum endliche Erweiterungen von Gruppen mit polynomiellen Untergruppenwachstum ebenfalls polynomielles Untergruppenwachstum besitzen. Endliche Erweiterungen von endlich erzeugten Gruppen sind endlich erzeugt und es gilt folgendes Lemma:

Lemma 1.23
Sei H endlich erzeugt und $H \lhd_f G$. Ist H residuell endlich, so auch G.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass für alle $h \in H \setminus \{1\}$ ein Normalteiler N in G mit endlichem Index und $h \notin N$ existiert. Da H residuell endlich ist, existiert $N' \lhd_f H$ mit $h \notin N'$. Wir betrachten nun alle Mengen der Form $N'_g := g^{-1}N'g$ mit $g \in G$. Diese sind alles Untergruppen von G. Der Schnitt

$$N := \bigcap_{g \in G} N'_g$$

ist nun sogar ein Normalteiler in G, denn ist $x \in N$ und $g \in G$, so ist x nämlich für alle $g' \in G$ darstellbar als $x = gg'^{-1}yg'g^{-1}$ mit $y \in N'$. Es folgt $g^{-1}xg \in N'_{g'}$ für alle $g' \in G$ und somit $g^{-1}xg \in N$. Da N eine Untergruppe von N' ist, gilt ebenso $h \notin N$ und es bleibt zu zeigen, dass N einen endlichen Index in G hat. Nach Lemma 2.1 hat N' einen endlichen Index in G und man überlegt sich, dass $[G : N'] = [G : N'_g]$ für alle $g \in G$ gilt. Da G endlich erzeugt ist, hat G nach Satz 1.5 nur endlich viele Untergruppen zum Index $[G : N']$. N ist also ein Schnitt endlich vieler Gruppen zu endlichem Index. Mit Hilfe von Lemma 2.1 b) folgt nun induktiv, dass N einen endlichen Index in G besitzt. ■

Wir wollen die Situation für $\mathcal{T}$-Gruppen aber noch etwas genauer beschreiben. Dazu ist der Begriff der Hirsch-Zahl hilfreich. Jede superauflösbare Gruppe besitzt eine endliche Subnormalreihe mit zyklischen Quotienten. Die Anzahl der Quotienten, die unendlich zyklisch sind, ist unabhängig von der Wahl der Reihe und wird Hirsch-Zahl genannt. Die Unabhängigkeit dieser Zahl von der Wahl einer konkreten Reihe, kann man sich wie folgt überlegen. Seien

$$\begin{aligned} G &= A_0 > A_1 > \ldots > A_r = \{1\}, \\ G &= B_0 > B_1 > \ldots > B_s = \{1\} \end{aligned}$$

zwei Subnormalreihen von G mit zyklischen Quotienten A_i/A_{i+1} bzw. B_j/B_{j+1}. Nach einem Satz von Schreier [8, Seite 180, Theorem 2] existieren zu beiden Reihen Verfeinerungen $G = A'_0 > A'_1 > \ldots > A'_c = \{1\}$ und $G = B'_0 > B'_1 > \ldots > B'_d = \{1\}$, so dass die beiden verfeinerten Subnormalreihen isomorph sind. Dies bedeutet, es gilt $c = d$ und es existiert eine Permutation $\pi \in \Sigma_c$ mit

$$A'_{i-1}/A'_i \cong B'_{\pi(i)-1}/B'_{\pi(i)}$$

für alle $i = 1, \ldots, c$. Die Quotienten der verfeinerten Reihen sind alle zyklisch und die Anzahl ihrer unendlich zyklischen Quotienten stimmt nach dem Satz von Schreier überein.

Man überlegt sich dann leicht, dass die Anzahl der unendlich zyklischen Quotienten der Ausgangsreihe und die ihrer Verfeinerung übereinstimmen. Es folgt, dass die Hirsch-Zahl wohldefiniert ist. Wir bezeichnen die Hirsch-Zahl einer superauflösbaren Gruppe G mit $h(G)$. $\mathcal{T}$-Gruppen G sind superauflösbar und G/G' ist als Quotient dann ebenfalls superauflösbar (siehe oben). Wir definieren $d(G) := h(G/G')$. Für $\mathcal{T}$-Gruppen gilt nun folgende Beziehung zwischen Hirsch-Zahl und Konvergenzabzisse ihrer Zetafunktion.

Proposition 1.24
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe. Dann gilt $d(G) \leq \alpha_G \leq h(G)$.

Beweis. Siehe [3, Seite 186, Proposition 1]. ■

Paragraph 2

Abelsche Gruppen

2.1 Die Zetafunktion einer freien abelschen Gruppe

Die torsionsfreien, endlich-erzeugten, nilpotenten Gruppen der Klasse 1 sind gerade die endlich-erzeugten freien abelschen Gruppe. Diese sind stets isomorph zu $\mathbb{Z}^d$, wobei d der Rang der jeweiligen Gruppe ist. Isomorphe Gruppen besitzen die gleiche Zetafunktion. Wir werden in diesem Abschnitt die Zetafunktion von $\mathbb{Z}^d$ berechnen, wollen aber zunächst einige elementare aber für uns hier und im Weitern wichtige Lemmata zur besseren Verständlichkeit und Lesbarkeit dieser Arbeit explizit angeben.

Lemma 2.1
a) Seien $U \leq A \leq G$ Gruppen. Es gilt $[G : U] < \infty \Longleftrightarrow ([G : A] < \infty) \wedge ([A : U] < \infty)$ und

$$[G : U] = [G : A] \cdot [G : U].$$

b) Seien $U, H \leq G$ Untergruppen mit endlichem Index in G. Dann gilt $[G : H \cap U] < \infty$.
c) Seien $U, H \leq G$ Untergruppen. Es gilt $[HU : U] < \infty \Longleftrightarrow [H : H \cap U] < \infty$ und

$$[HU : U] = [H : H \cap U].$$

Ist HU keine Gruppe, so bezeichne $[HU : U]$ die Anzahl der Linksnebenklassen von U in HU.

Beweis. Für a) siehe [8, Seite 62, Theorem 2 und Theorem 2']. Für b) und c) siehe [8, Seite 64, Theorem 3 und Theorem 3']. ■

Lemma 2.2
Sei $H \lhd G$ ein Normalteiler in G. Die Untergruppen $U^* \leq G/H$ entsprechen 1 zu 1 den

Untergruppen $U \leq G$, für die $H \leq U \leq G$ gilt, mittels

$$U^* \longmapsto U = \bigcup_{xH \in U^*} xH \quad \text{und} \quad U \longmapsto U^* = U/H.$$

Es gilt $[G/H : U^*] = [G : U]$. Außerdem ist U^* genau dann ein Normalteiler in G/H, wenn U ein Normalteiler in G ist.

Beweis. Siehe [4, Seite 29, Theorem 2.3.4]. Für die Gleichheit der Indexe betrachte man die Abbildung $\pi : G/U \longrightarrow (G/H)/(U/H)$

$$gU \longmapsto (gH)(U/H).$$

Diese ist wohldefiniert und bijektiv. U braucht hier kein Normalteiler zu sein. ■

Definition 2.3
Sei $H \lhd G$ ein Normalteiler und seien $H \leq A \leq G$ und $B \leq H$ Untergruppen. Wir definieren

$$\mathcal{U}_H(A, B) := \{U \leq G \,|\, HU = A \,\wedge\, H \cap U = B\}.$$

Lemma 2.4
Sei $H \lhd G$ ein Normalteiler. Dann gilt

$$\{U \,|\, U \leq_f G\} = \dot{\bigcup_{\substack{H \leq A \leq_f G \\ B \leq_f H}}} \mathcal{U}_H(A, B)$$

und es ist $[G : U] = [G : A] \cdot [H : B]$ für alle $U \in \mathcal{U}_H(A, B)$.

Beweis. Sei $U \leq_f G$. Es gilt $U \in \mathcal{U}_H(HU, H \cap U)$, denn da H ein Normalteiler ist, ist $HU \leq G$ eine Untergruppe, die H enthält. Mit Hilfe von Lemma 2.1 gilt

$$[G : U] = [G : HU] \cdot [HU : U] = [G : HU] \cdot [H : H \cap U]$$

und somit $[G : HU], [H : H \cap U] < \infty \Longleftrightarrow [G : U] < \infty$. Also $HU \leq_f G$ und $H \cap U \leq_f H$. Umgekehrt falls $U \in \mathcal{U}_H(A, B)$ mit $H \leq A \leq_f G$ und $B \leq_f G$, folgt aus demgleichen Grund $U \leq_f G$. Ist $U \in \mathcal{U}_H(A, B) \cap \mathcal{U}_H(A', B')$, so gilt $A = HU = A'$ und $B = H \cap U = B'$. Die Vereinigung ist also disjunkt. ■

Insbesondere folgt aus Satz 1.5, dass für eine endlich erzeugte Gruppe G mit Normalteiler H und $H \leq A \leq_f G$ und $B \leq_f H$ stets gilt

$$|\mathcal{U}_H(A, B)| < \infty.$$

Obige Lemmata zeigen nun, dass sich die Zetafunktion von G darstellen lässt als eine Art Zetafunktion von H in Verbindung mit der Zetafunktion des Quotienten G/H. Mit Hilfe des Umordnungsatzes 1.3 ist nämlich auf der offenen Konvergenz-Halbebene

$$\begin{aligned}
\sum_{U \leq_f G} [G:U]^{-s} &= \sum_{H \leq A \leq_f G} \left(\sum_{\substack{B \leq_f H \\ U \in \mathcal{U}_H(A,B)}} [G:U]^{-s} \right) \\
&= \sum_{H \leq A \leq_f G} \left(\sum_{B \leq_f H} \left(\sum_{U \in \mathcal{U}_H(A,B)} [G:A]^{-s} \cdot [H:B]^{-s} \right) \right) \\
&= \sum_{H \leq A \leq_f G} [G:A]^{-s} \cdot \left(\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(A,B)| \cdot [H:B]^{-s} \right) \\
&= \sum_{A^* \leq_f G/H} [G/H:A^*]^{-s} \cdot \left(\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(A,B)| \cdot [H:B]^{-s} \right).
\end{aligned}$$

Wir wollen dieses Prinzip im Folgenden nutzen, um die Zetafunktion von $\mathbb{Z}^d$ zu berechnen, und es später in einem etwas allgemeineren Kontext nocheinmal aufgreifen. Ist wie bei $\mathbb{Z}^d$ im Folgenden $|\mathcal{U}_H(A,B)| =: |\mathcal{U}_H(*,B)|$ unabhängig von $H \leq A \leq_f G$, so faktorisiert $\zeta_G(s)$ sogar nach $\zeta_{G/H}(s)$ und es gilt

$$\zeta_G(s) = \zeta_{G/H}(s) \cdot \left(\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(*,B)| \cdot [H:B]^{-s} \right).$$

Proposition 2.5
Es gilt

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \prod_{j=0}^{d-1} \zeta(s-j).$$

Die Konvergenz-Abzisse von $\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s)$ ist d.

Beweis. Siehe [3, Seite 190, Proposition 1.1]. $\mathbb{Z}$ hat für alle $n \in \mathbb{N}$ genau eine Untergruppe mit Index n - nämlich $n\mathbb{Z}$. Somit ist

$$\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \sum_{U \leq_f \mathbb{Z}} [\mathbb{Z}:U]^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s).$$

Also ist die Aussage richtig für $d = 1$. Wir schließen weiter mit Induktion nach d. Sei $Z = \mathbb{Z} \times 0 \times \ldots \times 0 \lhd \mathbb{Z}^d$. Es gilt $\mathbb{Z}^d/Z \cong \mathbb{Z}^{d-1}$. Zu A mit $Z \leq A \leq_f \mathbb{Z}^d$ und $B \leq_f Z$ wollen wir entsprechend unserer obigen Überlegungen $\mathcal{U}_Z(A,B)$ abzählen. Wir identifizieren dazu $\mathcal{U}_Z(A,B)$ mit $\mathcal{H} := \{\varphi \in \mathrm{Hom}(A, Z/B) \,|\, \varphi(z) = z + B \quad \forall z \in Z\}$ mittels $\Psi : U \mapsto \varphi_U$, wobei

$$\varphi_U(z+u) := z + B.$$

φ_U ist wohldefiniert, denn es gilt $Z+U = A$ und aus $z+u = z'+u'$ folgt $z - z' = u' - u \in Z \cap U = B$ und somit $z + B = z' + B$ und $\varphi_U(z+u) = \varphi_U(z'+u')$. φ_U ist außerdem ein Homomorphismus.
1) Für $U_1 \neq U_2$ aus $\mathcal{U}_Z(A,B)$ gilt $\varphi_{U_1} \neq \varphi_{U_2}$. Ohne Einschränkung sei $u_2 \in U_2 \setminus U_1$, dann gilt $u_2 \notin Z$ und es existieren $z \in Z \setminus B, u_1 \in U_1$ mit $u_2 = 0 + u_2 = z + u_1$. Wäre $z \in Z$ so würde $u_2 \in U_1$ folgen. Es gilt nun $\varphi_{U_2}(u_2) = 0 \neq \varphi_{U_1}(u_2)$ und Ψ ist injektiv.
2) Für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt $\varphi = \varphi_{\ker\varphi}$. Ψ ist also surjektiv. Denn sei $a \in A$, dann existiert ein $z \in Z$ mit $\varphi(a) = \varphi(z)$ und somit $a - z \in \ker\varphi$ und es gilt $A = \ker\varphi + Z$. Wegen $\varphi(z) = z + B$ für alle $z \in Z$ gilt auch $\ker\varphi \cap Z = B$. Sei $a \in A$ mit $a = z + u$ und $z \in Z, u \in \ker\varphi$, dann folgt $\varphi(a) = \varphi(z) = \varphi_{\ker\varphi}(a)$.
Da A einen endlichen Index in $\mathbb{Z}^d$ hat, muss A vom Rang d sein. Ansonsten existiert eine Basis $z_1, \ldots, z_d$ von $\mathbb{Z}^d$ und $h_1, \ldots, h_r \in \mathbb{Z}$ mit $r < d$, so dass $h_1 z_1, \ldots, h_r z_r$ eine Basis von A bildet [5, Seite 87, Theorem 12]. A ist dann der Kern des surjektiven Gruppenhomomorphismus $\Phi : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}/\langle h_1\rangle \times \ldots \times \mathbb{Z}/\langle h_r\rangle \times \mathbb{Z}^{d-r}$,

$$a_1 z_1 + \ldots + a_d z_z \mapsto (\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_r}, a_{r+1}, \ldots, a_d).$$

Und somit $\mathbb{Z}^d/A \cong \Phi(\mathbb{Z}^d)$ und $|\Phi(\mathbb{Z}^d)| = \infty$. Widerspruch.
Seien $e_1, \ldots, e_d$ die Einheitsvektoren. e_1 lässt sich zu einer Basis von A ergänzen. Bezüglich jeder Basis von $\mathbb{Z}^d$ ist der ggT der Koordinaten eines Elementes $a \in \mathbb{Z}^d$ gleich [5, Seite 88, Beweis zu Theorem 12]. Insbesondere ist der ggT der Koordinaten von e_1 also immer 1. Da $e_1 \in Z \subset A$ existieren $a_i \in \mathbb{Z}$ mit $e_1 = a_1 h_1 z_1 + \ldots + a_d h_d z_d$ und es folgt $\mathrm{ggT}(a_1 h_1, \ldots, a_d h_d) = 1$. Es gilt somit erst recht $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_d) = 1$, weshalb sich e_1 nach [5, Seite 86, Proposition 14] zu einer Basis $e_1, v_2, \ldots, v_d$ von A ergänzen lässt.
Nun können wir die Elemente aus $\mathcal{H}$ zählen, indem wir die möglichen Bilder dieser Basis zählen. Da e_1 stets auf $e_1 + B$ abgebildet wird und die Bilder von $v_2, \ldots, v_d$ beliebig in Z/B gewählt werden können, gilt

$$|\mathcal{U}_Z(A,B)| = |\mathcal{H}| = [Z : B]^{d-1}.$$

Es folgt aus den dieser Proposition vorangestellten Überlegungen

$$\zeta_{\mathbb{Z}^d}(s) = \left(\sum_{Z < A \leq_f \mathbb{Z}^d} [G : A]^{-s} \right) \cdot \left(\sum_{B \leq_f Z} [Z : B]^{d-1-s} \right) = \zeta_{\mathbb{Z}^{d-1}}(s) \cdot \zeta_{\mathbb{Z}}(s - (d-1)).$$

Die Aussage über die Konvergenzabzisse kann man sich ebenfalls induktiv und mit Hilfe des Umordnungssatzes 1.3 überlegen. Sie folgt aber auch aus der Theorie. $\mathbb{Z}^d$ ist eine $\mathcal{T}$-Gruppe mit Hirsch-Zahl d. Da $\mathbb{Z}^d$ abelsch ist, ist ihre Kommutatorgruppe $\{0\}$ und es gilt ebenfalls $d(\mathbb{Z}^d) = d$. Mit Proposition 1.24 folgt dann die Behauptung. ■

2.2 Erweiterungen abelscher Gruppen

Wir wollen nun folgende Überlegung aus Abschnitt 2.1 nocheinmal aufgreifen. Ist $H \lhd G$, so gilt

$$\zeta_G(s) = \sum_{H \leq A \leq_f G} [G:A]^{-s} \cdot \left(\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(A,B)| \cdot [H:B]^{-s} \right)$$

und wir möchten diskutieren, wie man für den Fall, dass H abelsch ist, die Koeffizienten $|\mathcal{U}_H(A,B)|$ anderweitig beschreiben kann. Man siehe dazu [2, Seiten 515,516].

Definition 2.6
a) Sei Q eine Gruppe und $P \lhd Q$ ein Normalteiler. Eine Untergruppe $C \leq Q$ heißt Komplement zu P in Q, falls $P \cap C = \{1\}$ und $PC = Q$ gilt.
b) $\mathcal{C}_Q(P)$ bezeichne die Menge aller Komplemente zu P in Q.

Ist C ein Komplement zu $P \lhd Q$, so existiert von jedem $q \in Q$ eine eindeutige Darstellung der Form $q = cp$ mit $c \in C$ und $p \in P$. Die Abbildung (Projektion)

$$\pi_C : Q \longrightarrow C$$

mit $\pi_C : cp \longmapsto c$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern P. π_C induziert damit einen Isomorphismus

$$\tilde{\pi}_C : Q/P \longrightarrow C$$

mit $\tilde{\pi}_C : qP \longmapsto \pi_C(q)$.

Wir wollen nun die Menge $\mathcal{U}_H(A,B)$ wiederum mit einer Menge von Abbildungen identifizieren, wobei sich an dieser Stelle Derivationen als geeignet erweisen. Sei P eine abelsche Gruppe und Q eine Gruppe. Weiter sei eine äußere Multiplikation $\cdot : Q \times P \longrightarrow P$ gegeben, die die folgenden Axiome für alle $p, p' \in P$ und $x, y \in Q$ erfüllt:

$$\begin{aligned} 1 \cdot p &= p, \\ (xy) \cdot p &= x \cdot (y \cdot p), \\ x \cdot (pp') &= (x \cdot p)(x \cdot p'). \end{aligned}$$

Wir nennen dann P einen Q-Modul. Ist zum Beispiel $P \lhd Q$ und P abelsch, so wird P durch Konjugation zu einem Q/P-Modul, indem wir definieren

$$(xP) \cdot p := x^{-1}px.$$

Man rechnet leicht nach, dass die Modul-Axiome erfüllt sind. Die Wohldefiniertheit der Abbildung gilt, da P abelsch ist.

Definition 2.7

Sei Q eine Gruppe und P ein Q-Modul. Eine Derivation ist eine Abbildung $\delta : Q \longrightarrow P$, so dass

$$\delta(xy) = (y \cdot \delta(x))\, \delta(y) \tag{2.1}$$

für alle $x, y \in Q$ gilt. $\mathrm{Der}(Q, P)$ *bezeichne die Menge aller Derivationen von Q nach P.*

Für eine Derivation gilt stets $\delta(1_Q) = \delta(1_Q 1_Q) = (1_Q \cdot \delta(1_Q))\delta(1_Q) = \delta(1_Q)^2$ und somit $\delta(1_Q) = 1_P$. Die Menge $\mathrm{Der}(Q, P)$ wird durch die übliche punktweise Verknüpfung von Abbildungen zu einer abelschen Gruppe. Man überlegt sich dazu, dass in einem Q-Modul P stets $x \cdot 1_P = 1_P$ und $x \cdot p^{-1} = (x \cdot p)^{-1}$ gilt. Es folgt, dass die konstante Abbildung 1_P eine Derivation bildet und zu allen Derivation δ, γ die Abbildungen $x \mapsto \delta(x)^{-1}$ und $x \mapsto \delta(x)\gamma(x)$ ebenfalls Derivationen sind.

Ist P ein Q/P-Modul durch Konjugation, so übersetzt sich die Gleichung 2.1 zu

$$\delta(xyP) = y^{-1}\delta(x)y\delta(y)$$

für alle $x, y \in Q$.

Proposition 2.8

Sei P ein Q/P-Modul durch Konjugation und es existiere ein Komplement C zu P in Q. Für ein $\delta \in \mathrm{Der}(Q/P, P)$ definieren wir $\delta^* : Q \longrightarrow Q$ durch

$$\delta^*(x) := \pi_C(x)\delta(xP).$$

Dann ist die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{Der}(Q/P, P) \longrightarrow \mathcal{C}_Q(P)$$

definiert durch $\Phi(\delta) := \mathrm{Im}(\delta^*) = \{\delta^*(x) \mid x \in Q\}$ eine Bijektion.

Beweis. Siehe [9, Seite 39, Proposition 1]. Zunächst ist δ^* ein Gruppenhomomorphismus. Seien $x, y \in Q$ und $y = p\pi_C(y)$ mit $p \in P$ dann gilt

$$\begin{aligned}
\delta^*(xy) &= \pi_C(xy)y^{-1}\delta(xP)y\delta(yP) \\
&= \pi_C(x)\pi_C(y)\pi_C(y)^{-1}p^{-1}\delta(xP)p\pi_C(y)\delta(yP) \\
&= \pi_C(x)\delta(xP)\pi_C(y)\delta(yP) \\
&= \delta^*(x)\delta^*(y),
\end{aligned}$$

denn $p^{-1}\delta(xP)p = \delta(xP)$, da sich diese Elemente in P befinden und P abelsch ist.
$\mathrm{Im}(\delta^*)$ ist also eine Untergruppe in Q, von der wir zeigen müssen, dass sie ein Komplement zu P ist. Dafür sei zunächst $x \in \mathrm{Im}(\delta^*) \cap P$. Dann existiert ein $y \in Q$ mit $x = \pi_C(y)\delta(yP)$. Es folgt $\pi_C(y) \in P$ und somit $\pi_C(y) = 1$ und $y \in P$. Wegen $\delta(P) = 1$ folgt $x = 1$.
Sei desweiteren $x \in Q$ und $p \in P$ mit $x = p\pi_C(x)$. Da δ^* ein Homomorphismus ist gilt

$$\delta^*(x) = \delta^*(x^{-1})^{-1} = \left(\pi_C(x^{-1})\delta(x^{-1}P)\right)^{-1} = \delta(x^{-1}P)^{-1}\pi_C(x)$$

und es folgt

$$x = p\delta(x^{-1}P)\delta^*(x) \in P \cdot \mathrm{Im}(\delta^*).$$

Also $Q \subset P \cdot \mathrm{Im}(\delta^*)$ und $\mathrm{Im}(\delta^*)$ ist ein Komplement zu P in Q.
Es bleibt zu zeigen, dass Φ bijektiv ist. Wir definieren $\Psi : \mathcal{C}_Q(P) \longrightarrow \mathrm{Der}(Q/P, P)$ durch

$$\Psi(K) : Q/P \longrightarrow P$$

mit

$$\Psi(K)(xP) := \tilde{\pi}_C(xP)^{-1}\tilde{\pi}_K(xP) = \pi_C(x^{-1})\pi_K(x)$$

für $K \in \mathcal{C}_Q(P)$. Da P ein Normalteiler ist existieren zu jedem $x \in Q$ Elemente $p, p' \in P$ mit $\pi_C(x)p = x = \pi_K(x)p'$ und man sieht leicht, dass $\Psi(K)(xP) \in P$ gilt. Wir rechnen nach, dass $\Psi(K)$ eine Derivation ist. Sei $y = p\pi_C(y)$. Es ist

$$\begin{aligned}
\Psi(K)(xyP) &= \pi_C(y^{-1})\pi_C(x^{-1})\pi_K(x)\pi_K(y) \\
&= \underbrace{y^{-1}p}_{=\pi_C(y^{-1})}\ \Psi(K)(xP)\underbrace{(p^{-1}y\pi_C(y^{-1}))}_{=1}\pi_K(y) \\
&= y^{-1}\Psi(K)(xP)y\Psi(K)(yP)
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in Q$, da P abelsch ist und somit $p\Psi(K)(xP)p^{-1} = \Psi(K)(xP)$ gilt.

Man überlegt sich nun leicht, dass Ψ die Umkehrabbildung zu Φ ist. Für alle $K \in \mathcal{C}_Q(P)$ ist $\Psi(K)^* = \pi_K$ und somit $\Phi(\Psi(K)) = K$. Andererseits gilt $\pi_{\Phi(\delta)} = \delta^*$ für $\delta \in \mathrm{Der}(Q/P, P)$ und wir erhalten $\Psi(\Phi(\delta)) = \delta$. Φ ist also bijektiv. ■

Wir kommen nun zur Ausgangssituation dieses Abschnittes zurück. Sei $H \lhd G$ und H abelsch, sowie $H \leq A \leq G$ und $B \leq H$. Existiert ein $U \in \mathcal{U}_H(A,B)$ mit $UH = A$ und $U \cap H = B$, so folgt dass B ein Normalteiler in A ist (da H abelsch ist). Wir erhalten dann eine Bijektion

$$\mathcal{U}_H(A,B) \longrightarrow \mathcal{C}_{A/B}(H/B),$$

indem wir U auf U/B abbilden. Dies folgt im Wesentlichen mit Hilfe von Lemma 2.2. Mit Proposition 2.8 folgt schließlich:

Proposition 2.9

Sei $H \lhd G$, H abelsch und $H \leq A \leq_f G$, so gilt

$$\sum_{B \leq_f H} |\mathcal{U}_H(A,B)| \cdot [H:B]^{-s} = \sum_{B \leq_f H} |\mathrm{Der}(A/H, H/B)| \cdot [H:B]^{-s} \cdot \delta_B,$$

wobei $\delta_B := 0$ für $\mathcal{U}_H(A,B) = \emptyset$ und $\delta_B := 1$ sonst.

Paragraph 3

Die Heisenberg-Gruppe

3.1 Die Heisenberg-Gruppe H_3 und ihre Untergruppen

Wir definieren

$$H_3 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

H_3 ist unter der gewöhnlichen Matrix-Multiplikation eine endlich-erzeugte, torsionsfreie, nilpotente Gruppe mit Nilpotenz-Klasse 2. H_3 heißt Heisenberg-Gruppe. Wir wollen im Folgenden die Untergruppen der Heisenberg-Gruppe zu endlichem Index diskutieren und im Anschluss daran die Zetafunktion von H_3 berechnen. Die Einsichten, die wir dabei gewinnen, werden auch später hilfreich sein, wenn wir die Zetafunktion einer endlichen Erweiterung von H_3 berechnen wollen. Zwecks Vereinfachung der Schreibweise definieren wir weiter

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.1 (Rechenregeln)
1) Für $z \in \mathbb{Z}$ ist

$$(E_1)^z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; (E_2)^z := \begin{pmatrix} 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; (E_3)^z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $E_1E_3 = E_3E_1$ *und* $E_2E_3 = E_3E_2$.

3) Für alle $x_i \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3}.$$

Die Darstellung eines Elementes aus H_3 *ist in der Form* $(E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3}$ *also insbesondere eindeutig.*

4) $(E_2)^z(E_1)^w = (E_1)^w(E_2)^z(E_3)^{zw}$ *für alle* $z, w \in \mathbb{Z}$.

5) Für alle $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$(E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3} \cdot (E_1)^{y_1}(E_2)^{y_2}(E_3)^{y_3} = (E_1)^{x_1+y_1}(E_2)^{x_2+y_2}(E_3)^{x_3+y_3+y_1x_2}.$$

6) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$((E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3})^n = (E_1)^{nx_1}(E_2)^{nx_2}(E_3)^{nx_3+\frac{n(n-1)}{2}x_1x_2}.$$

Beweis. Man rechne nach. ■

An den Rechenregeln aus Lemma 3.1 erkennt man sofort, dass H_3 endlich-erzeugt und torsionsfrei ist. Sei $Z(H_3) \lhd H_3$ das Zentrum von H_3.
Mit Hilfe von Rechenregel 5) schließt man $(E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3} \in Z(H_3) \iff x_1 = x_2 = 0$. Also ist $Z(H_3) = \langle E_3 \rangle$.

$$H_3/Z(H_3) = \{(E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}Z(H_3) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}^2$$

ist abelsch (Rechenregel 4). H_3 hat also die aufsteigende Zentralreihe

$$\{1\} < Z(H_3) < H_3$$

und ist nilpotent der Klasse 2. Wir wollen nun die Untergruppen von H_3 zu einem endlichen Index $n \in \mathbb{N}$ mit der nachfolgend definierten Menge von Matrizen identifizieren. Die beiden dann folgenden Sätze beschreiben dieses Verhältnis und die Untergruppen explizit und sind für uns von entscheidender Bedeutung.

Definition 3.2

Zu $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\mathcal{H}(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3} \;\middle|\; \begin{array}{c} a_1b_2c_3 = n,\ c_3 \,|\, a_1b_2,\ 0 < a_1, \\ 0 \le b_1 < b_2,\ 0 \le c_1, c_2 < c_3 \end{array} \right\}.$$

Satz 3.3
Zu $B \in \mathcal{H}(n)$ sei $u := (E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}(E_3)^{c_1}$, $v := (E_2)^{b_2}(E_3)^{c_2}$ und *$w := (E_3)^{c_3}$. Dann ist*

$$\Psi : \mathcal{H}(n) \longrightarrow \mathcal{U}(H_3, n)$$

mit $B \longmapsto U_B := \langle u, v, w\rangle$ eine Bijektion.

Wir beweisen diesen Satz später.

Satz 3.4
a) Jedes $x \in \langle u, v\rangle$ hat eine eindeutige Darstellung der Form

$$x = (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2z}$$

mit $n, m, z \in \mathbb{Z}$.
b) Für $B \in \mathcal{H}(n)$ gilt

$$U_B = \left\{ (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+c_3z} \,\middle|\, n, m, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Darstellung in obiger Menge ist eindeutig.

Beweis Satz 3.4. a) Es ist im Wesentlichen nur die Existenz einer solchen Darstellung zu beweisen. Die Eindeutigkeit folgt aus Rechenregel 3). Jedes Element aus H_3 in der Form $(E_1)^x(E_2)^y(E_3)^z$ ist eindeutig bestimmt, wodurch zunächst der Parameter n eindeutig bestimmt ist. Danach folgt sukzessive die Eindeutigkeit von m und z. Jedes $x \in \langle u, v\rangle$ ist bekanntlich von der Gestalt

$$x = y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_k$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und $y_i \in \{u, v, u^{-1}, v^{-1}, 1\}$. Wir schliessen mit Induktion nach k, dass eine Darstellung der im Satz besagten Form existiert. Für $k = 1$ wählen wir die Parameter $n, m, z \in \mathbb{Z}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
1 &: \; n = 0,\, m = 0,\, z = 0 \\
u &: \; n = 1,\, m = 0,\, z = 0 \\
v &: \; n = 0,\, m = 1,\, z = 0 \\
u^{-1} &: \; n = -1,\, m = 0,\, z = 0 \\
v^{-1} &: \; n = 0,\, m = -1,\, z = 0
\end{aligned}$$

Sei nun für alle Elemente x aus $\langle u, v\rangle$, die aus k oder weniger Verknüpfungen von Elementen aus $\{u, v, u^{-1}, v^{-1}, 1\}$ enstehen, eine Darstellung der besagten Form existent:

$$x = (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2z}$$

Wir rechnen mit Hilfe der Rechenregeln.

$$\begin{aligned} xu &= (E_1)^{(n+1)a_1}(E_2)^{(n+1)b_1+mb_2}(E_3)^{(n+1)c_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2z+a_1(nb_1+mb_2)} \\ &= (E_1)^{(n+1)a_1}(E_2)^{(n+1)b_1+mb_2}(E_3)^{(n+1)c_1+mc_2+\frac{(n+1)((n+1)-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2(z+m)} \end{aligned}$$

Der Term $a_1(nb_1+mb_2)$ im Exponenten von E_3 entsteht, weil $(E_1)^{a_1}$ aus u mit $(E_2)^{nb_1+mb_2}$ aus x vertauscht werden muss. Die besagte Darstellung existiert also auch für xu. Das gleiche gilt für alle anderen Möglichkeiten.

$$\begin{aligned} xv &= (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+(m+1)b_2}(E_3)^{nc_1+(m+1)c_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2z} \\ xu^{-1} &= (E_1)^{(n-1)a_1}(E_2)^{(n-1)b_1+mb_2}(E_3)^{(n-1)c_1+mc_2+\frac{(n-1)((n-1)-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2(z-m)} \\ xv^{-1} &= (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+(m-1)b_2}(E_3)^{nc_1+(m-1)c_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+a_1b_2z}. \end{aligned}$$

Jedes Element aus $\langle u, v\rangle$, das aus $k+1$ Verknüpfungen besteht, ist also ebenso von der geforderten Gestalt. Damit ist unser Induktionsschluss fertig.
b) Da $\langle w\rangle$ mit allen Elementen aus H_3 kommutiert, gilt stets $\langle u, v, w\rangle = \langle u, v\rangle\langle w\rangle$ - also $U_B = \langle u, v\rangle\langle w\rangle$. Wegen $c_3 \mid a_1b_2$ und Teil a) folgt dann die Inklusion von links nach rechts. Die andere Inklusion gilt wegen

$$u^n v^m w^z = (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+c_3z}.$$

Die Eindeutigkeit sieht man wie in Teil a). ■

Korollar 3.5
Für $B \in \mathcal{H}(n)$ gilt

$$U_B \cap Z(H_3) = \langle (E_3)^{c_3}\rangle.$$

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist trivial. Für die andere Richtung sei $b \in U_B \cap Z(H_3)$. Dann existieren eindeutig bestimmte $n, m, z \in \mathbb{Z}$ mit

$$b = (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+c_3z}.$$

Wegen $a_1 > 0$ und $b \in Z(H_3)$ muss $n = 0$ gelten, woraus dann sofort mit $b_2 > 0$ auch $m = 0$ folgt. Es gilt also $b = (E_3)^{c_3z}$. ■

Korollar 3.6
Für $B \in \mathcal{H}(n)$ gilt

$$U_B Z(H_3) = U_B \,\dot\cup\, (E_3)U_B \,\dot\cup\, (E_3)^2 U_B \,\dot\cup \ldots \dot\cup\, (E_3)^{c_3-1} U_B$$

und somit $[U_B Z(H_3) : U_B] = c_3$.

Beweis. Wegen $(E_3)^r \notin U_B$ für $1 < r < c_3$ sind die Nebenklassen alle disjunkt. Es ist also noch die Gleichheit der Mengen zu zeigen. Da die Potenzen von E_3 mit H_3 kommutieren ist die Inklusion von rechts nach links klar. Für die andere Inklusion sei $bz \in U_B Z(H_3)$ mit $z = (E_3)^x$ und $b \in U_B$. Wir machen Division mit Rest. Sei $x = qc_3 + r$ mit $r \in \{0, \ldots, c_3 - 1\}$. Dann gilt $bz = b((E_3)^{c_3})^q \cdot (E_3)^r \in (E_3)^r U_B$. ■

Korollar 3.7
Für $B \in \mathcal{H}(n)$ gilt

$$H_3 = \dot{\bigcup_{\substack{0 \le k < a_1 \\ 0 \le l < b_2}}} (E_1)^k (E_2)^l (U_B Z(H_3))$$

und somit ist insbesondere $[H_3 : U_B Z(H_3)] = a_1 b_2$.

Beweis. Da $Z(H_3)$ ein Normalteiler in H_3 ist, ist $U_B Z(H_3)$ eine Untergruppe. Sei

$$(E_1)^k (E_2)^l (U_B Z(H_3)) = (E_1)^{k'} (E_2)^{l'} (U_B Z(H_3))$$

mit $0 \le k, k' < a_1$ und $0 \le l, l' < b_2$. Dann ist

$$bz := \left((E_1)^{k'} (E_2)^{l'}\right)^{-1} \left((E_1)^k (E_2)^l\right) = (E_1)^{k-k'} (E_2)^{l-l'} (E_3)^{-l'(k-k')} \in U_B Z(H_3)$$

wobei $b \in U_B$ von der Gestalt $b = (E_1)^{k-k'} (E_2)^{l-l'} (E_3)^x$ mit geeignetem $x \in \mathbb{Z}$ ist und $z \in Z(H_3)$. Aus Satz 3.4 folgt nun $a_1 \mid (k-k')$ und wegen $0 \le k, k' < a_1$ gilt somit $k-k' = 0$ bzw. $k = k'$. Aus $k - k' = 0$ folgt dann weiter mit Satz 3.4, dass $b_2 \mid (l - l')$ gilt, und wir erhalten genauso $l = l'$. Da Nebenklassen von Untergruppen stets entweder disjunkt oder identisch sind, ist obige Vereinigung also disjunkt. Die Gleichheit der Mengen zeigt man ebenfalls mit Hilfe von Satz 3.4. Ist $h = (E_1)^{x_1} (E_2)^{x_2} (E_3)^{x_3} \in H_3$ so teilt man zunächst wieder x_1 durch a_1 und erhält $x_1 = qa_1 + r$ mit $0 \le r < a_1$. Wir setzen dann $k := r$, $n := q$ und fahren sukzessive mit der Berechnung von l, m, z fort, so dass schliesslich

$$h = (E_1)^k (E_2)^l \, (u^n v^m (E_3)^z) \in (E_1)^k (E_2)^l \, (U_B Z(H_3))$$

gilt. ■

Beweis Satz 3.3. Aus Korollar 3.6 und Korollar 3.7 folgt

$$\begin{aligned}[H_3 : U_B] &= [H_3 : U_B Z(H_3)] \cdot [U_B Z(H_3) : U_B] \\ &= (a_1 b_2) \cdot c_3 = n.\end{aligned}$$

Die Abbildung $\Psi : \mathcal{H}(n) \longrightarrow \mathcal{U}(H_3, n)$ ist also wohldefiniert.
1) Wir zeigen zunächst, dass Ψ injektiv ist. Seien dazu

$$B := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \; B' := \begin{pmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & 0 & c_3' \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(n)$$

mit $\langle u, v, w\rangle = U_B = U_{B'} = \langle u', v', w'\rangle$. Wir wollen $B = B'$ zeigen. Nach Korollar 3.5 gilt

$$\langle (E_3)^{c_3}\rangle = U_B \cap Z(H_3) = U_{B'} \cap Z(H_3) = \langle (E_3)^{c_3'}\rangle.$$

Also gilt $c_3 \mid c_3'$ und $c_3' \mid c_3$, woraus $c_3 = c_3'$ folgt. Aus $u \in U_{B'}$ folgt $a_1' \mid a_1$ mit Hilfe von Satz 3.4. Umgekehrt folgt genauso $a_1 \mid a_1'$, weshalb $a_1 = a_1'$ gilt. Wegen $a_1 b_2 c_3 = n = a_1' b_2' c_3'$ ist schließlich dann auch $b_2 = b_2'$.
Aus $v, v' \in U_B$ folgt wegen $b_2 = b_2'$

$$v^{-1} v' = (E_3)^{-c_2} (E_2)^{-b_2} (E_2)^{b_2'} (E_3)^{c_2'} = (E_3)^{c_2' - c_2} \in U_B.$$

Da $v^{-1} v'$ somit auch in $Z(H_3)$ liegt gilt $c_3 \mid (c_2' - c_2)$ und es folgt $c_2 = c_2'$.
Mit $u, u' \in U_B$ gilt wegen $a_1 = a_1'$

$$u^{-1} u' = (E_2)^{b_1' - b_1} (E_3)^{c_1' - c_1} \in U_B.$$

Aus Satz 3.4 folgt somit, dass eindeutig bestimmte $n, m, z \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$(E_2)^{b_1' - b_1} (E_3)^{c_1' - c_1} = (E_1)^{n a_1} (E_2)^{n b_1 + m b_2} (E_3)^{n c_1 + m c_2 + \frac{n(n-1)}{2} a_1 b_1 + c_3 z}.$$

Es folgt zunächst $n = 0$, woraus dann $b_2 \mid (b_1' - b_1)$ und somit $b_1 = b_1'$ folgt - also $m = 0$. Schließlich erhält man also auch $c_3 \mid (c_1' - c_1)$ und damit $c_1 = c_1'$.
2) Es bleibt zu zeigen, dass Ψ surjektiv ist. Sei $U \in \mathcal{U}(H_3, n)$. Wir wollen eine Matrix $B \in \mathcal{H}(n)$ konstruieren mit $U_B = U$. Zunächst gilt $U \cap Z(H_3) \neq \{1\}$. Ansonsten wären $(E_3)U, (E_3)^2 U, (E_3)^3 U, \ldots$ unendlich viele unterschiedliche Nebenklassen von U in H_3 im Widerspruch zu $[H_3 : U] = n < \infty$. Also gilt $U \cap Z(H_3) = \langle (E_3)^x \rangle$ für ein $x \in \mathbb{Z}$ $x \neq 0$. Für unser zu konstruierendes B definieren wir $c_3 := |x|$.

Nach Lemma 2.2 ist $UZ(H_3)/Z(H_3)$ eine Untergruppe von $H_3/Z(H_3) \cong \mathbb{Z}^2$. $UZ(H_3)/Z(H_3)$ ist also eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe. Es gilt

$$[H_3/Z(H_3) : UZ(H_3)/Z(H_3)] = [H_3 : UZ(H_3)] \leq [H_3 : U] < \infty.$$

Da der Index von $UZ(H_3)/Z(H_3)$ in $H_3/Z(H_3)$ endlich ist, hat $UZ(H_3)/Z(H_3)$ den gleichen Rang wie $H_3/Z(H_3)$ (Vergleiche dazu den Beweis von Proposition 2.5). Der Rang von $UZ(H_3)/Z(H_3)$ ist also 2. Sei $e_1 = (E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}Z(H_3)$, $e_2 = (E_1)^{y_1}(E_2)^{y_2}Z(H_3)$ eine Basis von $UZ(H_3)/Z(H_3)$.
Wir wollen einen Basiswechsel vornehmen und behaupten, dass ganze Zahlen $a_1, b_2 > 0$ und $0 \leq b_1 < b_2$ existieren, so dass $(E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}Z(H_3)$, $(E_2)^{b_2}Z(H_3)$ eine Basis von $UZ(H_3)/Z(H_3)$ bilden. Um dies zu zeigen konstruieren wir eine unimodulare Transformation $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) = \{A \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid \det A = \pm 1\}$ mit

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^{p_{11}} e_2^{p_{12}} \\ e_1^{p_{21}} e_2^{p_{22}} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

so dass wir zunächst eine Basis von $UZ(H_3)/Z(H_3)$ der Gestalt

$$e_1' = (E_1)^r(E_2)^s Z(H_3)\,,\ e_2' = (E_2)^t Z(H_3)$$

mit $r, s, t \in \mathbb{Z}$ erhalten (Genaueres zu unimodularen Transformationen läßt sich in [5, Seiten 85,86 und 9] nachlesen). Wir setzen dazu $p_{21} := \frac{\mathrm{kgV}(x_1,y_1)}{x_1}$ und $p_{22} := -\frac{\mathrm{kgV}(x_1,y_1)}{y_1}$. Man kann annehmen, dass sowohl $x_1 \neq 0$ als auch $y_1 \neq 0$ gilt. $x_1 = 0 = y_1$ ist unmöglich und falls eines der beiden Elemente 0 ist, müssen wir keinen solchen Basiswechsel vornehmen. Es gilt $\mathrm{ggT}(p_{21}, p_{22}) = 1$ und somit $p_{21}\mathbb{Z} + p_{22}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Es existieren also $p_{11}, p_{12} \in \mathbb{Z}$ mit $p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = 1$ – also $\det P = 1$ und $P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Wir erhalten also eine Basis (e_1', e_2') von der besagten Zwischenform.
Da alle Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & z \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit $z \in \mathbb{Z}$ ebenfalls unimodular sind, läßt sich (e_1', e_2') weiter transformieren in eine Basis von $UZ(H_3)/Z(H_3)$ der gewünschten Form

$$(E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}Z(H_3)\,,\ (E_2)^{b_2}Z(H_3).$$

Seien nun $c_1, c_2 \geq 0$ die kleinsten Zahlen, so dass $(E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}(E_3)^{c_1}$, $(E_2)^{b_2}(E_3)^{c_2} \in U$ gilt. Wegen $U \cap Z(H_3) = \langle (E_3)^{c_3} \rangle$ gilt notwendigerweise $c_1, c_2 < c_3$.

Wir haben nun eine Matrix B konstruiert

$$B := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

mit $0 < a_1, b_2, c_3$, $0 \leq b_1 < b_2$ und $0 \leq c_1, c_2 < c_3$. Es bleibt also zu zeigen, dass $a_1 b_2 c_3 = n = [H_3 : U]$, $c_3 \mid a_1 b_2$ und $U_B = U$ gilt.
(i) Vollkommen analog zu Korollar 3.6 gilt $[UZ(H_3) : U] = c_3$ wegen $U \cap Z(H_3) = \langle (E_3)^{c_3} \rangle$. Außerdem gilt $[H_3 : UZ(H_3)] = a_1 b_2$, denn es ist

$$H_3 = \dot{\bigcup_{\substack{0 \leq k < a_1 \\ 0 \leq l < b_2}}} (E_1)^k (E_2)^l (UZ(H_3)).$$

Die Mengeninklusion von links nach rechts und damit die Gleichheit der Mengen gilt wegen $(E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}$, $(E_2)^{b_2}$, $(E_3) \in UZ(H_3)$. Um die Disjunktheit der Vereinigung zu zeigen sei $(E_1)^k (E_2)^l (UZ(H_3)) = (E_1)^{k'} (E_2)^{l'} (UZ(H_3))$ mit $0 \leq k, k' < a_1$ und $0 \leq l, l' < b_2$. Es folgt

$$\left((E_1)^{k'}(E_2)^{l'}\right)^{-1}\left((E_1)^k (E_2)^l\right) = (E_1)^{k-k'}(E_2)^{l-l'}(E_3)^{-l'(k-k')} \in UZ(H_3)$$

und somit $(E_1)^{k-k'}(E_2)^{l-l'} Z(H_3) \in UZ(H_3)/Z(H_3)$. Auf Grund der Form unserer speziellen Basis $(E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1} Z(H_3)$, $(E_2)^{b_2} Z(H_3)$ folgt nun zunächst $a_1 \mid (k - k')$ und somit $(k - k') = 0$ bzw. $k = k'$. Hieraus folgt dann wiederum $b_2 \mid (l - l')$ und somit $l = l'$. Insgesammt erhalten wir so

$$n = [H_3 : U] = [H_3 : UZ(H_3)] \cdot [UZ(H_3) : U] = a_1 b_2 c_3.$$

(ii) Sei wie gehabt $u = (E_1)^{a_1}(E_2)^{b_1}(E_3)^{c_1}, v = (E_2)^{b_2}(E_3)^{c_2}$ und $w = (E_3)^{c_3}$. Es gilt $u, v, w \in U$ und somit $uvu^{-1}v^{-1} = (E_3)^{-a_1 b_2} \in U \cap Z(H_3)$. Hieraus folgt $c_3 \mid a_1 b_2$.
(iii) Wegen $u, v, w \in U$ gilt $U_B = \langle u, v, w \rangle \subset U$. Wir wollen die andere Inklusion zeigen. Wegen $U \cap Z(H_3) = \langle w \rangle$ gilt $U \cap Z(H_3) \subset U_B$. Sei nun $x = (E_2)^y (E_3)^z \in U \cap \langle E_2, E_3 \rangle$. Es folgt $(E_2)^y Z(H_3) \in UZ(H_3)/Z(H_3)$ und somit $b_2 \mid y$. Sei $y = mb_2$. Dann folgt

$$v^{-m} x = (E_3)^{z - mc_2} \in U \cap Z(H_3) \subset U_B$$

und somit $x \in U_B$, denn v^m, v^{-m} liegen sowohl in U als auch in U_B. Also erhalten wir

$$U \cap \langle E_2, E_3 \rangle \subset U_B.$$

Sei nun $(E_1)^x(E_2)^y(E_3)^z \in U$. Es folgt $(E_1)^x(E_2)^y Z(H_3) \in UZ(H_3)/Z(H_3)$ und somit $a_1 \,|\, x$. Es sei $x = na_1$. Analog zum Schritt zuvor folgt nun

$$u^{-n}(E_1)^x(E_2)^y(E_3)^z \in \langle E_2, E_3\rangle \cap U \subset U_B$$

und wir erhalten $(E_1)^x(E_2)^y(E_3)^z \in U_B$. ■

3.2 Die Zetafunktion von H_3

Lemma 3.8

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{F}_{p^k}(n) := \{(x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, xyz = n \,\wedge\, z \,|\, p^k xy\}$ mit p prim und $k \in \mathbb{N}_0$. Gilt $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ *so ist die Abbildung*

$$\mathcal{F}_{p^k}(n) \times \mathcal{F}_{p^k}(m) \longrightarrow \mathcal{F}_{p^k}(nm)$$

mit $((x,y,z),(x',y',z')) \longmapsto (xx',yy',zz')$ eine Bijektion.

Beweis. Es ist klar, dass $xx'yy'zz' = nm$ gilt. Aus $z \,|\, p^k xy$ und $z' \,|\, p^k x'y'$ folgt wegen $\mathrm{ggT}(z,z') = 1$, dass $z \,|\, xy$ oder $z' \,|\, x'y'$ gilt. Somit erhalten wir $zz' \,|\, p^k xx'yy'$ und die Abbildung ist wohldefiniert. Um die Bijektivität zu zeigen, muss man ebenfalls mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ argumentieren. Sei $(a,b,c) \in \mathcal{F}_{p^k}(nm)$ und weiter seien $x := \mathrm{ggT}(a,n)$ und $x' := \mathrm{ggT}(a,m)$. Wegen $a \,|\, nm$ und $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ gilt $a = xx'$. Dabei sind x und x' eindeutig bestimmt. Analog erhält man $b = yy'$ und $c = zz'$ mit eindeutig bestimmten y, y', z, z'. Es ist $xyz = n$ und $x'y'z' = m$ und wegen $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ folgt außerdem aus $zz' \,|\, p^k xx'yy'$, dass $z \,|\, p^k xy$ und $z' \,|\, p^k x'y'$ gilt. $((x,y,z),(x',y',z'))$ ist somit das eindeutige Urbild von (a,b,c) und die Abbildung ist bijektiv. ■

Bemerkung 3.9

Anstatt $\mathcal{F}_1(n)$ schreiben wir auch einfach $\mathcal{F}(n)$. Es ist stets $\mathcal{F}_{p^k}(n) \subset \mathcal{F}_{p^l}(n)$ für $k \leq l$. Die andere Inklusion gilt nicht unbedingt. Ist $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$, so gilt $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F}_{p^k}(n)$.

Lemma 3.10

Seien $a_{H_3}(n) := |\,\mathcal{U}(H_3,n)\,|$ die Koeffizienten der Zetafunktion von H_3. Für $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$ *gilt*

$$a_{H_3}(n \cdot m) = a_{H_3}(n) \cdot a_{H_3}(m).$$

Die Koeffizienten sind also multiplikativ.

Beweis. Da es sich bei H_3 um eine $\mathcal{T}$-Gruppe handelt, folgt die Aussage aus der Theorie - man siehe [3, Seiten 191,192, Proposition 1.2]. Da wir auf die folgende Rechnung später verweisen wollen, führen wir den Beweis. Nach Satz 3.3 gilt $a_{H_3}(n) = |\,\mathcal{H}(n)\,|$. Es bezeichne nun

$$a_{H_3}(n,x,y,z) := \left|\left\{B \in \mathcal{H}(n) \,\middle|\, a_1 = x,\ b_2 = y \text{ und } c_3 = z\right\}\right|.$$

Mit der Menge $\mathcal{F}(n)$ aus Lemma 3.8 gilt dann

$$a_{H_3}(n) = \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(n)} a_{H_3}(n,x,y,z)$$

und man überlegt sich leicht, dass $a_{H_3}(n,x,y,z) = yz^2$ gilt. Insbesondere ist also stets $a_{H_3}(n,x,y,z) \cdot a_{H_3}(m,x',y',z') = a_{H_3}(nm,xx',yy',zz')$. Mit Hilfe von Lemma 3.8 folgt nun

$$\begin{aligned}
a_{H_3}(n) \cdot a_{H_3}(m) &= \left(\sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(n)} a_{H_3}(n,x,y,z)\right) \cdot \left(\sum_{(x',y',z')\in\mathcal{F}(m)} a_{H_3}(m,x',y',z')\right) \\
&= \sum_{((x,y,z),(x',y',z'))\in\mathcal{F}(n)\times\mathcal{F}(m)} a_{H_3}(n,x,y,z) \cdot a_{H_3}(m,x',y',z') \\
&= \sum_{((x,y,z),(x',y',z'))\in\mathcal{F}(n)\times\mathcal{F}(m)} a_{H_3}(nm,xx',yy',zz') \\
&= \sum_{(a,b,c)\in\mathcal{F}(nm)} a_{H_3}(nm,a,b,c) \quad = \quad a_{H_3}(n\cdot m)
\end{aligned}$$

■

Lemma 3.11
a) Für die Koeffizienten $a_{H_3}(\cdot)$ von ζ_{H_3}, jede Primzahl p und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{H_3}(p^k) = \sum_{i=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\left(p^{2i}\cdot\sum_{j=0}^{k-i}p^j\right).$$

Außerdem gilt $a_{H_3}(p^k) \le p^{\frac{7k}{4}}$ für alle bis auf endlich viele k.
b) Die Euler-Faktoren $\zeta_{a_{H_3},p}(s)$ konvergieren für alle s mit $\mathrm{Re}(s) \ge 2$ absolut und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^k)p^{-sk} = \frac{1-p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})}.$$

Beweis. a) Der Index i steht für die Vielfachheiten von p in c_3. Da $c_3 \mid a_1b_2$ gelten muss, läuft i bis maximal $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor$. Für jedes i gibt es genau p^{2i} Möglichkeiten c_1 und c_2 zu wählen. Nach der Festlegung von c_3 bleibt $k-i$ mal der Faktor p zur Verteilung auf a_1 und b_2.

Der Index j steht dabei für die Vielfachheit von p in b_2. Für jedes j gibt es dann genau p^j Möglichkeiten b_1 zu wählen.
Mit Hilfe der geometrischen Summenformel erhält man

$$\begin{aligned} a_{H_3}(p^{2k}) &= \sum_{i=0}^{k}\left(p^{2i}\sum_{j=0}^{2k-i}p^j\right) = \frac{p^{3k+2}-p^{2k+1}}{(p-1)^2}-\frac{p^{2k+2}-1}{(p-1)(p^2-1)}, \\ a_{H_3}(p^{2k+1}) &= \sum_{i=0}^{k}\left(p^{2i}\sum_{j=0}^{2k+1-i}p^j\right) = \frac{p^{3k+3}-p^{2k+2}}{(p-1)^2}-\frac{p^{2k+2}-1}{(p-1)(p^2-1)}. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass schliesslich $a_{H_3}(p^n) \leq p^{\frac{7n}{4}}$ gilt.
b) Für $\mathrm{Re}(s) \geq 2$ ist $|p^{-s}| \leq p^{-2}$ und somit gilt nach a) schließlich $a_{H_3}(p^n)\left|(p^{-s})^n\right| \leq p^{-\frac{1}{4}n}$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{H_3}(p^n)p^{-sn}$ konvergiert absolut mit der geometrischen Reihe $\sum(p^{-\frac{1}{4}})^n$ als Majorante. Wir rechnen mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^{2k})t^{2k} &= \frac{t^2p^2+pt^2+1}{(1-t^2)(1-t^2p^2)(1-t^2p^3)}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^{2k+1})t^{2k+1} &= \frac{t^3p^2+tp+t}{(1-t^2)(1-t^2p^2)(1-t^2p^3)}. \end{aligned}$$

Fasst man dies zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^k)t^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^{2k})t^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{H_3}(p^{2k+1})t^{2k+1} \\ &= \frac{t^2p^2+tp+1}{(1-t)(1-t^2p^2)(1-t^2p^3)} \\ &= \frac{1-t^3p^3}{(1-t)(1-t^2p^2)(1-t^2p^3)(1-tp)}. \end{aligned}$$

Man setze $t = p^{-s}$ und es folgt die Behauptung. ■
Wegen Lemma 3.10 und Lemma 3.11 folgt mit Hilfe des Eulerproduktes 1.8 für $\mathrm{Re}(s) > 2$

$$\zeta_{H_3}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)},$$

da das Produkt der Euler-Faktoren $\prod \zeta_{a_{H_3},p}(s)$ dann auf Grund des Eulerproduktes der Riemannschen Zetafunktion (Gleichung 1.2) konvergiert. Für $s = 2$ konvergiert das Produkt der Eulerfaktoren nicht mehr. Die Konvergenz-Abzisse von $\zeta_{H_3}(s)$ ist also 2.

3.3 Eine endliche Erweiterung von H_3

Wir definieren

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_i \in \mathbb{Z},\, \varepsilon \in \{1,-1\} \right\}.$$

G bildet zusammen mit der Matrix-Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe und ist eine Erweiterung von H_3. Wir wollen die Untergruppen mit endlichem Index in G und die Zetafunktion von G untersuchen. Es sei

$$\xi := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.12 (Rechenregeln)
1) Für $x_i \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\xi \cdot (E_1)^{x_1}(E_2)^{-x_2}(E_3)^{-x_3} = \begin{pmatrix} -1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\xi \cdot (E_1)^{x_1}(E_2)^{x_2}(E_3)^{x_3} = (E_1)^{x_1}(E_2)^{-x_2}(E_3)^{-x_3} \cdot \xi$.
3) $\xi^2 = 1$.

Man sieht mit Hilfe der Rechenregeln leicht, dass H_3 ein Normalteiler in G ist und

$$G = H_3 \,\dot{\cup}\, \xi H_3$$

gilt. G/H_3 ist also isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Da H_3 und G/H_3 auflösbar sind folgt aus Theorem 1.14, dass G eine auflösbare Gruppe ist. G ist jedoch nicht nilpotent. Für das Zentrum von G gilt $Z(G) = \{1\}$ und somit ist die aufsteigende Zentralreihe von G nicht endlich.

Wir wollen versuchen die Zetafunktion von G auf die Zetafunktion von H_3 zurückzuführen. Für jede Untergruppe U von H_3 gilt $[G:U] = [G:H_3]\cdot[H_3:U] = 2\cdot[H_3:U]$ nach Lemma 2.1. Die Untergruppen von H_3 mit endlichem Index in H_3 sind also genau die Untergruppen von G mit endlichem Index in G, die in H_3 liegen und es gilt $\zeta_G(s) = \zeta_{G_{|H_3}}(s) + \zeta_{G_{|\neg H_3}}(s)$, wobei wir definieren

$$\begin{aligned}\zeta_{G_{|H_3}}(s) &:= \sum_{U\leq_f H_3}[G:U]^{-s} = \sum_{U\leq_f H_3}(2\cdot[H_3:U])^{-s} = 2^{-s}\zeta_{H_3}(s),\\ \zeta_{G_{|\neg H_3}}(s) &:= \sum_{\substack{U\leq_f G\\ U\nleq H_3}}[G:U]^{-s}.\end{aligned}$$

Weiter sei $\mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$ die Menge der Untergruppen von G zum Index n, die nicht in H_3 liegen.

Definition 3.13

a) Zu

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}(n)$$

bezeichne

$$\mathcal{R}(U_B) := \{(k,l,j) \in \mathbb{Z}^3 \,|\, 0 \leq k < a_1,\, 0 \leq l < b_2,\, 0 \leq j < c_3\}.$$

b) Für $(k,l,j) \in \mathbb{Z}^3$ sei

$$a(k,l,j) := (E_1)^k (E_2)^l (E_3)^j.$$

Bemerkung 3.14

Die Menge $\{a(k,l,j) \,|\, (k,l,j) \in \mathcal{R}(U_B)\}$ bildet ein Repräsentantensystem der Elemente von H_3/U_B. Dies folgt aus Korollar 3.6 in Verbindung mit Korollar 3.7.

Lemma 3.15

a) Zu jedem $U \in \mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$ existieren genau ein $B \in \mathcal{H}(n)$ und genau ein $a(k,l,j)$ mit $(k,l,j) \in \mathcal{R}(U_B)$, so dass

$$U = U_B \,\dot\cup\, \xi a(k,l,j) U_B.$$

b) Eine Menge U von der Gestalt

$$U = U_B \,\dot\cup\, \xi a U_B$$

mit $a \in H_3$ und $B \in \mathcal{H}(n)$ liegt genau dann in der Menge $\mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$, falls $(\xi a)^2 \in U_B$ und $U_B \xi a \subset \xi a U_B$ gilt.

Beweis. Für den Beweis von Teil a) sei $U \in \mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$. Es gilt

$$U = U \cap G = (U \cap H_3) \,\dot\cup\, (U \cap \xi H_3).$$

Wegen $U \not\subset H_3$ existiert ein $h \in H_3$ mit $\xi h \in U$. Es folgt $\xi H_3 \subset H_3 U = U H_3$ und somit $G = H_3 U$. Mit Hilfe von Lemma 2.1 gilt

$$[H_3 : H_3 \cap U] = [H_3 U : U] = [G : U] = n.$$

Es existiert somit ein $B \in \mathcal{H}(n)$ mit $U \cap H_3 = U_B$. Als Schnitt von U mit H_3 ist die Untergruppe U_B eindeutig bestimmt und somit auch B. Aus Bemerkung 3.14 können wir

$$\xi H_3 = \dot{\bigcup_{(k,l,j) \in \mathcal{R}(U_B)}} \xi a(k,l,j) U_B$$

folgern und somit gilt

$$U \cap \xi H_3 = \dot{\bigcup_{(k,l,j) \in \mathcal{R}(U_B)}} U \cap \xi a(k,l,j) U_B.$$

Für jedes $a = a(k,l,j)$ gilt nun $U \cap \xi a U_B = \emptyset$ oder $U \cap \xi a U_B = \xi a U_B$. Denn sei $\xi ab \in \xi a U_B \cap U$ mit $b \in U_B$, so folgt wegen $U_B \subset U$, dass $\xi abb^{-1} = \xi a \in U$ und somit $\xi a U_B \subset U$ gilt.
Weiter sei $a' = a(k',l',j')$ und $\xi a, \xi a' \in U$. Es folgt $(\xi a)^{-1}(\xi a') = a^{-1}a' \in U$. Da sowieso $a^{-1}a' \in H_3$ gilt, erhalten wir $a^{-1}a' \in U \cap H_3 = U_B$ und somit $a = a'$. Insgesammt folgt somit

$$U \cap \xi H_3 = \xi a U_B$$

für genau ein $a = a(k,l,j)$, da der Schnitt wegen $U \not\subset H_3$ nicht leer sein kann.

Um Teil b) zu zeigen, sei U von der angegebenen Form eine Gruppe in $\mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$. Es gilt $H_3 \cap H_3 \xi a = \emptyset$. Da stets $(\xi a)^2 \in H_3$ und da U eine Gruppe ist gilt nun auch $(\xi a)^2 \in U$. Und es folgt $(\xi a)^2 \in U \cap H_3 = U_B$. Weiter folgt aus $U_B \xi a \subset U$, dass $U_B \xi a \subset \xi a U_B$ gilt. Für die andere Implikation sei U nun eine Menge von besagter Form, die $(\xi a)^2 \in U_B$ und $U_B \xi a \subset \xi a U_B$ erfüllt. Die Abgeschlossenheit der Menge U bezüglich der Multiplikation folgt für Elemente $b \in U_B$ und $u \in U$ beliebig, sofort aus der Tatsache, dass U_B eine Gruppe ist bzw. wegen $U_B \xi a \subset \xi a U_B$. Weiter gilt für $b_1, b_2, b_3 \in U_B$ mit $b_1 \xi a = \xi a b_3$

$$(\xi a b_1)(\xi a b_2) = \xi a (b_1 \xi a) b_2 = \xi a (\xi a b_3) b_2 = (\xi a)^2 b_3 b_2 \in U_B \subset U.$$

Die Existenz von Inversen für Elemente $b \in U_B$ ist trivial. Für $x = \xi ab \in \xi a U_B$ sei $b' \in U_B$ mit $b \xi a = \xi a b'$ und es gilt $x^{-1} = \xi a (b')^{-1} (\xi a)^{-2} \in U$. Den Index von einem solchen U in G haben wir weiter oben schon berechnet. ■

Sei

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(n) \times \mathcal{R} &:= \left\{ (B,k,l,j) \in \mathcal{H}(n) \times \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, (k,l,j) \in \mathcal{R}(U_B) \right\}, \\
\mathcal{G}(n) &:= \left\{ (B,k,l,j) \in \mathcal{H}(n) \times \mathcal{R} \,\middle|\, (\xi a(k,l,j))^2 \in U_B \wedge U_B \xi a(k,l,j) \subset \xi a(k,l,j) U_B \right\}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 3.15 erhalten wir eine Bijektion $\mathcal{G}(n) \longrightarrow \mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)$ durch

$$(B,k,l,j) \longmapsto U_B \ \dot{\cup} \ \xi a(k,l,j) U_B.$$

Die Rückrichtung von Teil b) des Lemma's stellt dabei sicher, dass die Abbildung wohldefiniert ist und Teil a) und die Hinrichtung von Teil b) zeigen, dass die Abbildung bijektiv ist. Wir wollen nun die definierende Bedingung in der Menge $\mathcal{G}(n)$ durch Gleichungen ersetzen.

Satz 3.16
Ein Element $(B,k,l,j) \in \mathcal{H}(n) \times \mathcal{R}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$$

liegt genau dann in $\mathcal{G}(n)$, wenn eines der folgenden Gleichungssysteme erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 : \qquad k &= 0, \\
b_1 &= 0, \\
0 &\equiv 2c_1 + a_1 l \mod c_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 : \qquad k &= 0, \\
b_2 &= 2b_1 \quad (b_1 \neq 0), \\
0 &\equiv 2c_1 - c_2 + a_1 l \mod c_3.
\end{aligned}$$

$$\Gamma_3: \qquad \begin{aligned} k &= \frac{a_1}{2} \quad (a_1 \neq 0, \text{ gerade}),\\ b_1 &= 0,\\ 0 &\equiv c_1 + \frac{a_1}{2}l \mod c_3,\\ 0 &\equiv \frac{a_1 b_2}{2} \mod c_3. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $(B,k,l,j) \in \mathcal{H}(n) \times \mathcal{R}$ und $a = a(k,l,j) = (E_1)^k(E_2)^l(E_3)^j$. Wir wissen aus dem vorigen Abschnitt Satz 3.4, dass

$$U_B = \left\{ (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+c_3z} \;\middle|\; n,m,z \in \mathbb{Z} \right\}$$

gilt und die Darstellung in den Mengenklammern eindeutig ist. Es gilt $(\xi a)^2 = (E_1)^{2k}(E_3)^{-kl}$, denn $\xi a \xi = (E_1)^k(E_2)^{-l}(E_3)^{-j}$. Somit folgt aus $(\xi a)^2 \in U_B$, dass ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $na_1 = 2k$. Wegen $0 \leq k < a_1$ bedeutet dies $k = 0$ oder $k = \frac{a_1}{2}$. Falls $k \neq 0$, so ist also $n = 1$ und es muss ein $m \in \mathbb{Z}$ existieren mit $b_1 + mb_2 = 0$. Wegen $0 \leq b_1 < b_2$ folgt dann $b_1 = 0$ und $m = 0$. Schließlich muss ein $z \in \mathbb{Z}$ existieren mit $c_1 + zc_3 = -kl$, also $c_3 \,|\, c_1 + \frac{a_1}{2}l$. Wir erhalten somit

$$(\xi a)^2 \in U_B \Longrightarrow (k=0) \;\vee\; \Big((k = \frac{a_1}{2}) \wedge (b_1 = 0) \wedge (c_3 \,|\, c_1 + \frac{a_1}{2}l) \Big).$$

Man überlegt sich genauso, dass

$$(\xi a)^2 \in U_B \Longleftarrow (k=0) \;\vee\; \Big((k = \frac{a_1}{2}) \wedge (b_1 = 0) \wedge (c_3 \,|\, c_1 + \frac{a_1}{2}l) \Big)$$

gilt.

Sei nun weiter $b := b(n,m,z) := (E_1)^{na_1}(E_2)^{nb_1+mb_2}(E_3)^{nc_1+mc_2+\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1+c_3z} \in U_B$. Mit Hilfe der Rechenregeln erhalten wir $(\xi a)^{-1} b \xi a = x(n,m,z)$, wobei

$$x(n,m,z) := (E_1)^{na_1}(E_2)^{-nb_1-mb_2}(E_3)^{-nc_1-mc_2-\frac{n(n-1)}{2}a_1b_1-c_3z-k(nb_1+mb_2)-na_1l}$$

ist. Dies bedeutet, wir haben $U_B \xi a \subset \xi a U_B$ genau dann, wenn für alle $n,m,z \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $x(n,m,z) \in U_B$ ist.

Dafür ist zunächst notwendig, dass $x(1,0,z) \in U_B$ für alle z gilt. Es folgt, dass ein $m' \in \mathbb{Z}$ mit $b_1 + m'b_2 = -b_1$ existiert, also $b_2 \,|\, 2b_1$ gilt. Wegen $0 \leq b_1 < b_2$ können wir somit $b_1 = 0$ oder $b_2 = 2b_1$ als notwendig voraussetzen. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

1.Fall: $k = 0 \wedge b_1 = 0$. Es gilt $x(n,m,z) \in U_B$ genau dann, wenn ein $z' \in \mathbb{Z}$ existiert mit

$$x(n,m,z) = (E_1)^{na_1}(E_2)^{-mb_2}(E_3)^{nc_1 - mc_2 + c_3 z'}.$$

Dies bedeutet es existiert ein z' mit

$$-nc_1 - mc_2 - c_3 z - na_1 l = nc_1 - mc_2 + c_3 z',$$

was äquivalent ist zu $c_3 \mid n(2c_1 + a_1 l)$. Es gilt somit

$$U_B \xi a \subset \xi a U_B \Longleftrightarrow c_3 \mid 2c_1 + a_1 l.$$

2.Fall: $k = 0 \wedge b_2 = 2b_1 \neq 0$. Es gilt $x(n,m,z) \in U_B$ genau dann, wenn $m', z' \in \mathbb{Z}$ existieren, so dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} -nb_1 - mb_2 &= nb_1 + m'b_2, \\ -nc_1 - mc_2 - \frac{n(n-1)}{2}a_1 b_1 - c_3 z - na_1 l &= nc_1 + m'c_2 + \frac{n(n-1)}{2}a_1 b_1 + c_3 z' \end{aligned}$$

gelten. Dies ist äquivalent zu $m' = -n - m$ und der Existenz eines z' mit

$$-\frac{n(n-1)}{2}a_1 2b_1 - c_3(z + z') = n(2c_1 - c_2 + a_1 l).$$

Wegen $a_1 2b_1 = a_1 b_2$ und $c_3 \mid a_1 b_2$ gilt somit

$$U_B \xi a \subset \xi a U_B \Longleftrightarrow c_3 \mid 2c_1 - c_2 + a_1 l.$$

3.Fall: $k = \frac{a_1}{2} \wedge b_1 = 0$. Es gilt $x(n,m,z) \in U_B$ genau dann, wenn ein z' existiert mit

$$-nc_1 - mc_2 - c_3 z - m\frac{a_1 b_2}{2} - na_1 l = nc_1 - mc_2 + c_3 z'.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} U_B \xi a \subset \xi a U_B \quad &\Longleftrightarrow \quad c_3 \,\Big|\, \left(n(2c_1 + a_1 l) + m\frac{a_1 b_2}{2}\right) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad c_3 \,\Big|\, (2c_1 + a_1 l) \;\wedge\; c_3 \,\Big|\, \left(\frac{a_1 b_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Weitere Fälle sind auf Grund der Bedingung $(\xi a)^2 \in U_B$ nicht zu beachten. ■

Wir führen nun analog zu Abschnitt 3.2 die folgende Bezeichnung ein. Für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $(x, y, z) \in \mathcal{F}(n)$ sei

$$\gamma_i(n) := \left| \left\{ (B, k, l, j) \in \mathcal{G}(n) \,\middle|\, (B, k, l, j) \text{ erfüllt } \Gamma_i \right\} \right|,$$

$$\gamma_i(n,x,y,z) := \left|\left\{(B,k,l,j) \in \mathcal{G}(n) \,\middle|\, (B,k,l,j) \text{ erfüllt } \Gamma_i \text{ und } a_1 = x,\, b_2 = y,\, c_3 = z\right\}\right|.$$

Wir erhalten damit

$$\left|\mathcal{U}(G_{|\neg H_3}, n)\right| = |\mathcal{G}(n)| = \gamma_1(n) + \gamma_2(n) + \gamma_3(n)$$

und somit

$$\zeta_{G|\neg H_3}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_1(n)n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_2(n)n^{-s} + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_3(n)n^{-s}.$$

Die Gleichungen Γ_1

Lemma 3.17
a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$, $((x,y,z),(x',y',z')) \in \mathcal{F}(n) \times \mathcal{F}(m)$, als auch $\mathrm{ggT}(2,nm) = 1$, dann gilt

$$\gamma_1(nm, xx', yy', zz') = (zz')^2(yy').$$

Setzt man $m = 1$, so ist $\gamma_1(n,x,y,z) = z^2 y = a_{H_3}(n,x,y,z)$ und es folgt $\gamma_1(nm) = \gamma_1(n)\gamma_1(m)$ für alle n, m unter obigen Voraussetzungen.
b) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m,2) = 1$ und $(x,y,z) \in \mathcal{F}(m)$. Weiter sei $(2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}) \in \mathcal{F}(2^n)$, dann gilt

$$\gamma_1(2^n m, 2^{k_1}x, 2^{k_2}y, 2^{k_3}z) = \begin{cases} k_3 = 0 \,\vee\, k_1 = 0: & (2^{k_3}z)^2(2^{k_2}y) \\ k_3 \neq 0 \,\wedge\, k_1 \neq 0: & (2^{k_3}z)^2(2^{k_2+1}y) \end{cases}$$

Setzt man $m = 1$, so ist insbesondere

$$\gamma_1(2^n, 2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}) = \begin{cases} k_3 = 0 \,\vee\, k_1 = 0: & 2^{2k_3}2^{k_2} \\ k_3 \neq 0 \,\wedge\, k_1 \neq 0: & 2^{2k_3}2^{k_2+1} \end{cases}$$

und es folgt $\gamma_1(2^n m) = \gamma_1(2^n)\gamma_1(m)$ für alle n und alle m mit $\mathrm{ggT}(m,2) = 1$.

Beweis. Für Teil a) sei $(B,k,l,j) \in \mathcal{G}(nm)$, das Γ_1 erfüllt. $k = 0, a_1 = xx', b_2 = yy', c_3 = zz', b_1 = 0$ sind festgelegt. j und c_2 können frei in $\{0,\ldots,zz'-1\}$ gewählt werden, sowie l frei in $\{0,\ldots,yy'-1\}$ gewählt werden kann. Da 2 invertierbar ist modulo zz' existiert zu jedem l genau ein c_1, so dass $2c_1 + xx'l \equiv 0 \bmod zz'$ gilt. Die Multiplikativität $\gamma_1(nm) = \gamma_1(n)\gamma_1(m)$ folgt dann analog zu Lemma 3.10 mit Hilfe von Lemma 3.8.
Für Teil b) machen wir eine Fallunterscheidung. Falls $k_3 = 0$, so ist 2 invertierbar modulo $2^{k_3}z$ und man rechnet genauso wie in Teil a). Falls $k_3 \neq 0$ und $k_1 = 0$, so folgt $k_2 \geq 1$ und l muss gerade sein. Es gibt somit $2^{k_2-1}y$ Möglichkeiten l zu wählen. Für ein gerades l gilt

nun $2^{k_3}z \mid 2c_1 + 2^{k_1}xl$ genau dann, wenn $2^{k_3-1}z \mid c_1 + x\frac{l}{2}$. Zu jedem geraden l existieren also genau 2 c_1 die diese Gleichung erfüllen - eines in $\{0, \dots, 2^{k_3-1}z - 1\}$ und eines in $\{2^{k_3-1}z, \dots, 2^{k_3}z - 1\}$. Den Fall $k_3 \neq 0$ und $k_1 \neq 0$ beweist man genauso, wie den unmittelbar davor - allerdings braucht hier l nicht gerade gewählt zu werden, weshalb doppelt soviele Möglichkeiten existieren. Der Rest von Teil b) läuft analog zu Teil a). ■

Aus obigem Lemma folgt nun, dass γ_1 die Voraussetzungen von Satz 1.8 erfüllt und multiplikativ ist. Man muss hierfür nur noch begründen, dass für jede Primzahl p und jedem $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$ und $2 \mid n$ gilt

$$\gamma_1(p^k n) = \gamma_1(p^k) \cdot \gamma_1(n).$$

Sei dazu $m = 2^l m'$ mit $\mathrm{ggT}(m', 2) = 1$. Dann gilt $\gamma_1(m) \cdot \gamma_1(p^k) = \gamma_1(m') \cdot \gamma_1(2^l) \cdot \gamma_1(p^k) = \gamma_1(m'p^k) \cdot \gamma_1(2^l) = \gamma_1(m'p^k 2^l) = \gamma_1(p^k m)$ nach obigem Lemma.
Für $p \neq 2$ kennen wir bereits auch schon die Eulerfaktoren. Es ist nämlich

$$\gamma_1(p^k) = \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(p^k)} \gamma_1(p^k, x, y, z) = \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(p^k)} a_{H_3}(p^k, x, y, z) = a_{H_3}(p^k).$$

Und somit $\zeta_{\gamma_1,p}(s) = \zeta_{a_{H_3},p}(s)$. Man siehe Abschnitt 3.2.
Wir müssen also noch den Eulerfaktor für $p = 2$ bestimmen. Um nun $\gamma_1(2^n)$ zu zählen, gehen wir wieder die Möglichkeiten durch die Exponenten bei $(2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}) \in \mathcal{F}(2^n)$ zu verteilen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_1(2^n) &= \sum_{k_2=0}^{n} 2^{k_2} + \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{2k_3}\left(2^{n-k_3} + \sum_{k_2=0}^{n-k_3-1} 2^{k_2+1}\right) \\
&= \sum_{k_2=0}^{n} 2^{k_2} + \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{2k_3}\left(\sum_{k_2=0}^{n-k_3} 2^{k_2} - 1\right) + \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{n+k_3} \\
&= \left(\sum_{k_3=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\left(2^{2k_3}\sum_{k_2=0}^{n-k_3} 2^{k_2}\right)\right) + \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{n+k_3} - \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{2k_3} \\
&= a_{H_3}(2^n) + \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{n+k_3} - \sum_{k_3=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2^{2k_3}.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\gamma_1(2^n) = a_{H_3}(2^n) + \underbrace{2^{n+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1} - 2^{n+1} - \frac{4}{3}4^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + \frac{4}{3}}_{=:r(n)}.$$

Und

$$\zeta_{\gamma_1,2}(s) \;=\; \zeta_{a_{H_3},2}(s) + \sum_{k=0}^{\infty} r(2k)2^{-s2k} + \sum_{k=0}^{\infty} r(2k+1)2^{-s(2k+1)}.$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} r(2k)2^{-s2k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{3k+1} - 2^{2k+1} - \frac{4}{3}4^k + \frac{4}{3}\right)2^{-s2k} \\
&= \frac{2}{1-2^{-(2s-3)}} - \frac{2}{1-2^{-(2s-2)}} - \frac{4}{3(1-2^{-(2s-2)})} + \frac{4}{3(1-2^{-2s})} \\
&= \frac{2^{-(2s-2)}(2^{-(2s-3)}+1)}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-2s})}.
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} r(2k+1)2^{-s(2k+1)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{3k+2} - 2^{2k+2} - \frac{4}{3}4^k + \frac{4}{3}\right)2^{-s(2k+1)} \\
&= 2^{-s}\left(\frac{4}{1-2^{-(2s-3)}} - \frac{4}{1-2^{-(2s-2)}} - \frac{4}{3(1-2^{-(2s-2)})} + \frac{4}{3(1-2^{-2s})}\right) \\
&= \frac{2^{-(3s-2)}(p^{-(2s-2)}+3)}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-2s})}.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\zeta_{\gamma_1,2}(s) \;=\; \zeta_{a_{H_3},2}(s) + \frac{2^{-(2s-2)}(2^{-(2s-2)}+2^{-(s-1)}+1)}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-s})}.$$

Schließlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_1(n)n^{-s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\zeta_{\gamma_1,p}(s) \\
&= \zeta_{H_3}(s)\cdot\left(1 + \frac{\zeta_{\gamma_1,2}(s) - \zeta_{a_{H_3},2}(s)}{\zeta_{a_{H_3},2}(s)}\right) \\
&= \zeta_{H_3}(s)\cdot\left(1+2^{-(2s-2)}\right).
\end{aligned}$$

Die Konvergenzabzisse der Reihe ist 2 - mit der gleichen Begründung wie in Abschnitt 3.2.

Die Gleichungen Γ_2

Ist n ungerade, so ist $\gamma_2(n) = 0$. Es gilt

$$\gamma_2(2n, x, 2y, z) = 2yz^2,$$

denn $k = 0, a_1 = x, b_1 = y, b_2 = 2y$ und $c_3 = z$ sind festgelegt. j, c_1 können in $\{0, \ldots, z-1\}$ frei gewählt werden, sowie l in $\{0, \ldots, 2y-1\}$ frei gewählt werden kann. c_2 ist dann durch die Gleichung $2c_1 - c_2 + a_1 l \equiv 0 \bmod c_3$ eindeutig bestimmt. Ferner ist $\gamma_2(2n, x, y, z) = 0$, falls y ungerade ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\gamma_2(2n) &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(2n)} \gamma_2(2n, x, y, z)\\ &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}_2(n)} \gamma_2(2n, x, 2y, z).\end{aligned}$$

Für $((x, y, z), (x', y', z')) \in \mathcal{F}_2(n) \times \mathcal{F}_2(m)$ gilt

$$2 \cdot \gamma_2(2nm, xx', 2yy'zz') = \gamma_2(2n, x, 2y, z) \cdot \gamma_2(2m, x', 2y', z'),$$

weshalb analog zu Lemma 3.10 mit Hilfe von Lemma 3.8 folgt, dass $\gamma_2' : n \longmapsto \frac{1}{2}\gamma_2(2n)$ eine multiplikative Abbildung ist. Für jede Primzahl $p \neq 2$ gilt $\mathcal{F}_2(p^k) = \mathcal{F}(p^k)$ und es folgt

$$\gamma_2'(p^k) = \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(p^k)} \frac{1}{2}\gamma_2(2p^k, x, 2y, z) = \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(p^k)} a_{H_3}(p^k, x, y, z) = a_{H_3}(p^k).$$

Wir kennen somit für $p \neq 2$ die Eulerfaktoren – $\zeta_{\gamma_2', p}(s) = \zeta_{a_{H_3}, p}(s)$.
Es gilt

$$\mathcal{F}_2(2^n) = \mathcal{F}(2^n) \,\dot\cup\, \left\{(2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}) \,\middle|\, k_1 + k_2 + k_3 = n \,\wedge\, k_3 = k_1 + k_2 + 1\right\},$$

woraus für gerades n die Gleichheit $\mathcal{F}_2(2^n) = \mathcal{F}(2^n)$ folgt. Obige Menge rechts ist dann nämlich leer, da für Elemente $(2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3})$ folgt, dass $n + 1 = 2k_1$ ist und n nicht gerade sein kann. Für ungerades n rechnen wir

$$\begin{aligned}\gamma_2'(2^n) &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}_2(2^n)} \frac{1}{2}\gamma_2(2\cdot 2^n, x, 2y, z)\\ &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(2^n)} \frac{1}{2}\gamma_2(2\cdot 2^n, x, 2y, z) + \sum_{k_2=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2}\gamma_2(2\cdot 2^n, 2^{\frac{n-1}{2}-k_2}, 2\cdot 2^{k_2}, 2^{\frac{n+1}{2}}).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\gamma_2'(2^n) &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(2^n)} a_{H_3}(2^n,x,y,z) \;+\; \sum_{k_2=0}^{\frac{n-1}{2}} 2^{n+1}2^{k_2} \\
&= a_{H_3}(2^n) \;+\; 2^{n+1}(2^{\frac{n+1}{2}}-1).
\end{aligned}$$

Für gerades n gilt entsprechend $\gamma_2'(2^n) = a_{H_3}(2^n)$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\zeta_{\gamma_2',2}(s) &= \zeta_{a_{H_3},2}(s) \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(2k+1)+1}(2^{\frac{(2k+1)+1}{2}}-1)2^{-s(2k+1)} \\
&= \zeta_{a_{H_3},2}(s) \;+\; \sum_{k=0}^{\infty}(2^{3k+3}-2^{2k+2})2^{-s(2k+1)} \\
&= \zeta_{a_{H_3},2}(s) \;+\; \frac{2^{-s+2}}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_2'(n)n^{-s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \zeta_{\gamma_2',p}(s) \\
&= \zeta_{H_3}(s)\cdot\left(1+\frac{\zeta_{\gamma_2',2}(s)-\zeta_{a_{H_3},2}(s)}{\zeta_{a_{H_3},2}(s)}\right) \\
&= \zeta_{H_3}(s)\cdot\left(1+\frac{2^{-s+2}(1-2^{-s})(1-2^{-(s-1)})}{1-2^{-(3s-3)}}\right).
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_2(n)n^{-s} &= \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_2(2n)(2n)^{-s} \\
&= 2^{-s+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\gamma_2(2n)n^{-s} \\
&= 2^{-s+1}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_2'(n)n^{-s} \\
&= \zeta_{H_3}(s)\cdot\left(2^{-s+1}+\frac{2^{-2s+3}(1-2^{-s})(1-2^{-(s-1)})}{1-2^{-(3s-3)}}\right).
\end{aligned}$$

Die Konvergenzabzisse bleibt wie zuvor 2.

Die Gleichungen Γ_3

Es gilt $\gamma_3(n) = 0$, falls n ungerade ist. Ferner gilt $\gamma_3(2n, x, y, z) = 0$ falls x ungerade ist oder z nicht $\frac{xy}{2}$ teilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\gamma_3(2n) &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(2n)} \gamma_3(2n, x, y, z) \\ &= \sum_{(x,y,z)\in\mathcal{F}(n)} \gamma_3(2n, 2x, y, z).\end{aligned}$$

Wegen $\gamma_3(2n, 2x, y, z) = yz^2 = a_{H_3}(n, x, y, z)$ ergibt sich $\gamma_3(2n) = a_{H_3}(n)$ und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_3(n) n^{-s} = 2^{-s} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_3(2n) n^{-s} = 2^{-s} \zeta_{H_3}(s).$$

Resultat

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen, so ist

$$\zeta_G(s) = \left(\frac{2^{-4s+4} + 2^{-3s+4} + 3 \cdot 2^{-2s+3} + 3 \cdot 2^{-s+1} + 1}{2^{-2s+2} + 2^{-s+1} + 1} \right) \cdot \zeta_{H_3}(s).$$

$\zeta_G(s)$ hat genau wie $\zeta_{H_3}(s)$ die Konvergenzabzisse 2 und für $p \neq 2$ die gleichen Eulerfaktoren

$$\zeta_{a_G,p}(s) = \frac{1 - p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})}.$$

Für $p = 2$ gilt

$$\begin{aligned}\zeta_{a_G,2}(s) &= \left(\frac{2^{-4s+4} + 2^{-3s+4} + 3 \cdot 2^{-2s+3} + 3 \cdot 2^{-s+1} + 1}{2^{-2s+2} + 2^{-s+1} + 1} \right) \cdot \zeta_{a_{H_3},2}(s) \\ &= \frac{2^{-4s+4} + 2^{-3s+4} + 3 \cdot 2^{-2s+3} + 3 \cdot 2^{-s+1} + 1}{(1-2^{-(2s-3)})(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-s})}.\end{aligned}$$

Insbesondere besitzt $\zeta_G(s)$ somit ein Eulerprodukt und die Abbildung $n \longmapsto a_G(n)$ ist multiplikativ.

Literaturverzeichnis

[1] du Sautoy, Grunewald. *Zeta functions of groups and rings.* Proc. of the International Congress of Math., Madrid, Spain, 2006.

[2] du Sautoy, McDermott, Smith. *Zeta functions of crystallographic groups and meromorphic continuation.* Proc. London Math. Soc. 79, 511-534 (1999).

[3] Grunewald, Segal, Smith. *Subgroups of finite index in nilpotent groups.* Invent. math. 93, 185-223 (1988).

[4] Hall, M. Jr. (1966). *The Theory of Groups.* The Macmillan Company, New York.

[5] Ledermann, W. (1973). *Introduction to Group Theory.* Longman Group Limited, London.

[6] Mandelbrojt, S. (1972). *Dirichlet Series - Principles and Methods.* Reidel, Dordrecht-Holland.

[7] Remmert, Schumacher (2002) 5. Auflage. *Funktionentheorie 1.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[8] Schwerdtfeger, H. (1976). *Group Theory.* Noordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands.

[9] Segal, D. (1983). *Polycyclic groups.* Cambridge University Press.

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbständig erstellt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt zu haben.

Philip Herriger Düsseldorf, den 10. Juni 2007